

## 下負荷面モデルによる非線形ばねの検討

Examination of nonlinear spring by subloading surface model

間瀬 辰也\*

MASE Tatsuya

A spring formulation based on a function of the normal-yield ratio, which indicates the magnitude of the present load relative to the ultimate load, from a 1D stress state subloading surface model is presented. Next, since the nonlinearity of conventional springs is based on displacement, the nonlinear spring based on a function of displacement is proposed from the subloading surface model based on a function of the normal-yield ratio. Furthermore, the proposed equation for the material constant  $u$  of the subloading surface model corresponding to the nonlinear model of the Recommendations for the design of building foundations is presented.

### 1. はじめに

自然界に存在する岩・地盤はもとより工場製品である金属をはじめとする物質は、応力の絶対値が大きくなっていくといずれ塑性変形を生じながらある極限值に到達する。建築基礎構造設計指針(2019改定)<sup>1)</sup>(以下、基礎指針)での杭周地盤ばねの非線形特性に関しては、杭水平変位の $-0.5$ 乗かつ地盤反力は極限地盤反力以下としている。また、杭を深さ方向に離散化して杭応力を評価するモデルにおいては、初期剛性と極限地盤反力に基づくバイリニアモデル<sup>例えば2)</sup>や双曲線モデル<sup>例えば3)</sup>などが広く使われている。これらの非線形特性の課題として、基礎指針では初期剛性と極限地盤反力が関連づけられていないという点、バイリニアモデルでは極限地盤反力まで線形剛性となるため適切なひずみレベルを仮定して初期剛性を低減させている点、双曲線モデルでは変形量が小さい範囲において剛性を過大評価<sup>4)</sup>するという点がある。

ここでは、一般的な1次元ばねの初期剛性と極限荷重の間をつなぐ非線形特性として荷重が極限值に近づくにつれて塑性変形の発生が顕著となる仮定を設けた弾塑性論に基づく1次元下負荷面モデル(図1参照)の定式化を示す。

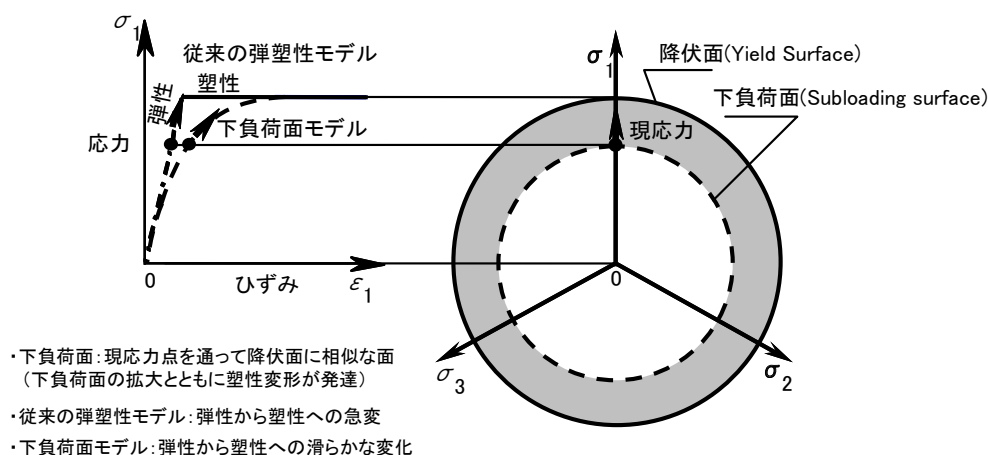


図1 古典弾塑性モデルと下負荷面モデルの概念図

\* 居住空間デザイン学科 教授

## 2. 下負荷面モデル

下負荷面モデルの3次元状態の表現及び3次元状態から1次元状態に変換した表現を示す。

### (1) 3次元での正規降伏面および下負荷面

応力関数  $f$  と等方硬化関数  $F$ 、等方硬化変数  $H$  とする降伏面を正規降伏面として式(1)に示す。

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = F(H) \quad \dots\dots\dots (1)$$

下負荷面<sup>5), 6), 7), 8)</sup>は、下式で与えられる。

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = RF(H) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $R$ は正規降伏比で、正規降伏面に対する下負荷面の大きさの比である。

式(2)の下負荷面の時間微分より、

$$tr\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}\right) = \dot{R} F(H) + R \frac{\partial F(H)}{\partial H} \dot{H} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $F' \equiv dF/dH$  .

正規降伏比  $R$  の発展則は下式のように与えられる。

$$\dot{R} = U(R) \|\mathbf{D}^p\| \quad \text{for } \mathbf{D}^p \neq \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $U$  は下記の条件を満足する  $R$  の単調減少関数である。

式(3)に式(4)を代入する。

$$tr\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}\right) = U \|\mathbf{D}^p\| F(H) + R \frac{\partial F(H)}{\partial H} \dot{H} \quad \dots\dots\dots (5)$$

本式は、Euler の同次関数の定理に基づき次式となる。

$$tr(\mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{tr(\mathbf{N} \boldsymbol{\sigma})}{f(\boldsymbol{\sigma})} (U \|\mathbf{D}^p\| F(H) + R \frac{\partial F(H)}{\partial H} \dot{H}) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \bigg/ \left\| \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\| \quad (\|\mathbf{N}\| = 1) \quad \dots\dots\dots (7)$$

### (2) 1次元での正規降伏面および下負荷面

式(1)から(7)の変数を1次元に置換し、1次元での下負荷面モデルの構成式を示す。

$$\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \sigma, f(\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow \sigma, \mathbf{N} \rightarrow 1, H \rightarrow \varepsilon^p, \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rightarrow \dot{\sigma}, \mathbf{D}^p \rightarrow \dot{\varepsilon}^p \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$F(H) \equiv F(\varepsilon^p) \rightarrow \sigma_{y0} + H^p \varepsilon^p \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\dot{F} \equiv \frac{\partial F(H)}{\partial H} \dot{H} \equiv \frac{\partial F(\varepsilon^p)}{\partial \varepsilon^p} \dot{\varepsilon}^p \rightarrow H^p \dot{\varepsilon}^p \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、硬化は線形硬化、つまり、硬化係数  $H^p = \text{const.}$  を仮定する。

式(6)に式(8)から(10)を代入すると式(11)となり、整理して式(12)が得られる。

$$tr(\mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \dot{\sigma}, \frac{tr(\mathbf{N} \boldsymbol{\sigma})}{f(\boldsymbol{\sigma})} = \frac{\sigma}{\sigma} = 1, U \|\mathbf{D}^p\| F + R \dot{F} = U \dot{\varepsilon}^p (\sigma_{y0} + H^p \varepsilon^p) + R H^p \dot{\varepsilon}^p \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\dot{\sigma} = \dot{\varepsilon}^p (U(\sigma_{y0} + H^p \varepsilon^p) + R H^p) \quad \dots\dots\dots (12)$$

これより、塑性係数  $M^p$  は次のように与えられる。

$$M^p \equiv \dot{\sigma} / \dot{\varepsilon}^p = U(\sigma_{y0} + H^p \varepsilon^p) + R H^p \quad \dots\dots\dots (13)$$

### 3. 弾塑性論に基づくばねの非線形特性の定式化<sup>9)</sup>

1 次元状態のばねを考えた場合、ひずみをばねの伸び縮みに対応する変位増分に置換することを考える。すなわち、変位増分  $\Delta\delta$  を弾性変位増分( $\Delta\delta^e$ )および塑性変位増分( $\Delta\delta^p$ )として次のように加算的に分解する。

$$\Delta\delta = \Delta\delta^e + \Delta\delta^p \quad \cdots \cdots \cdots (14)$$

次に、極限荷重( $P_{\max}$ )以下における荷重変化による塑性変形を表現するため、荷重が極限荷重に近づくにつれて、塑性変形が顕著に発生すると仮定する。ここで、極限荷重に対する現荷重の大きさの比を“正規降伏比”と呼び  $R(0 \leq R \leq 1)$  で表す。

$$P = R \cdot P_{\max} \quad \cdots \cdots \cdots (15)$$

増分時の挙動を定式化するため式(15)を物質時間微分する。

$$\dot{P} = \dot{R} \cdot P_{\max} \quad \cdots \cdots \cdots (16)$$

正規降伏比の発展則(正規降伏比増分と塑性変形増分との関係の規則)として次式を仮定する。

$$\dot{R} = U \|\dot{\delta}^p\| \quad \text{for } \dot{\delta}^p \neq 0 \quad \cdots \cdots \cdots (17)$$

ここで  $U(R)$  は、 $R$  の滑らかな単調減少関数で、次の条件を満たす(式(18)参照)。 $\|\ \|$  は大きさを示す。

弾性( $R=0$ )状態では、微小な塑性変形に対して無限大の速さで  $R$  ( $U(R) \rightarrow +\infty$ )が増大し、極限荷重に達する( $R=1$ )と  $R$  の変化はなくなる( $U(R)=0$ )。その間( $0 < R < 1$ )では正の値で滑らかな単調減少をする(図2参照)。

$$\left. \begin{array}{l} U(R) \rightarrow +\infty \quad \text{for } R=0 \\ U(R) > 0 \quad \text{for } 0 < R < 1 \\ U(R) = 0 \quad \text{for } R = 1 \\ (U(R) < 0 \quad \text{for } R > 1) \end{array} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (18)$$

関数  $U(R)$  の具体例<sup>10)</sup>として次式が挙げられる。

$$U(R) = u \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2} \cdot R\right) \quad \cdots \cdots \cdots (19)$$

ここに、 $u$  は極限荷重に近づく度合いを示す材料定数(1/m)である(図3参照)。

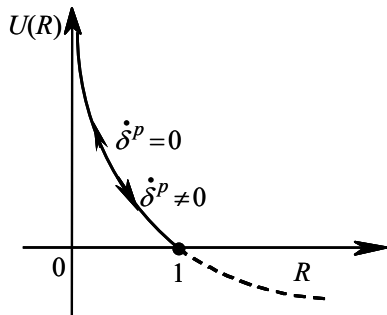


図2 関数  $U(R)$

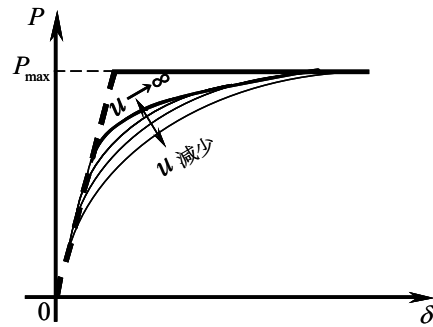


図3 荷重－変位曲線の推移

初期剛性  $K_0$  とした場合の増分形を下式に示す。塑性係数は  $M^p = \dot{\sigma} / \dot{\varepsilon}^p$ 、変位増分は弾性変位増分と塑性変位増分の和の関係式  $\Delta\delta = \Delta\delta^e + \Delta\delta^p$  および弾性論の関係式  $\Delta P = K_0 \cdot \Delta\delta$  を用いる

と下式が得られる。

$$\Delta P = K_0 (\Delta \delta - \Delta \delta^p) = K_0 (\Delta \delta - \Delta P / M^p) \rightarrow \Delta P (1 + K_0 / M^p) = K_0 \Delta \delta \quad \dots\dots\dots (20)$$

これより、

$$\Delta P = \frac{K_0}{1 + K_0 / M^p} \Delta \delta = K_0 \left( \frac{K_0 + M^p}{K_0 + M^p} - \frac{K_0}{K_0 + M^p} \right) \Delta \delta = K_0 \left( 1 - \frac{K_0}{K_0 + M^p} \right) \Delta \delta \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\text{非硬化の場合の塑性係数： } M^p = U(R) \cdot P_{\max} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\text{硬化の場合の塑性係数： } M^p = U(R) \cdot (P_{\max} + H^p \varepsilon^p) + R H^p \quad \dots\dots\dots (23)$$

図 4 に下負荷面モデルとバイリニアモデルにおける荷重－塑性変位曲線図を示す。

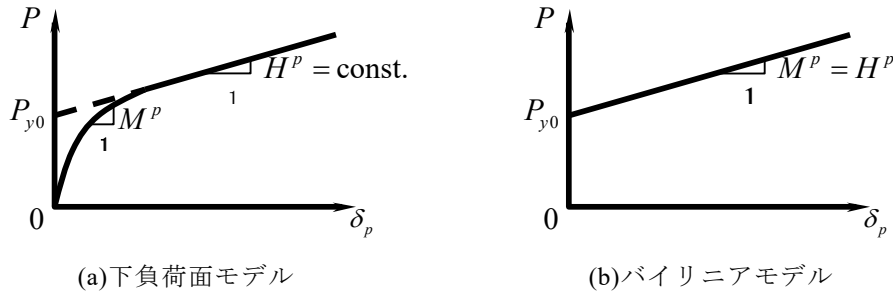


図 4 1次元状態での荷重－塑性ひずみ曲線図

ここでは、非硬化のばねを仮定する。

$$M^p = U(R) \cdot P_{\max} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$P = \Sigma \Delta P, \quad \delta = \Sigma \Delta \delta, \quad R = P / P_{\max} \quad \dots\dots\dots (25)$$

正規降伏比（ $R$ ）に応じた式は下記となる。

$$P(R) = P_{\max} \cdot R \quad \dots\dots\dots (26)$$

塑性変位は、式(17)、(19)の正規降伏比の発展則より増分形の式(27)を初期条件を  $\delta^p = 0, R = 0$  として積分して整理した式(28)を用いる。

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot R\right) dR = u \cdot d\delta^p \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\delta^p = \frac{2}{u \cdot \pi} \cdot \ln \left\{ 1 / \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot R\right) \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\delta(R) = \delta^e(R) + \delta^p(R) = \frac{P_{\max} \cdot R}{K_0} + \frac{2}{u \cdot \pi} \ln \left\{ 1 / \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot R\right) \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

式(26)と式(29)より、割線剛性は式(30)となる。

$$K_{\text{secant}}(R) = \frac{P(R)}{\delta(R)} = \frac{K_0}{1 + \frac{K_0}{P_{\max} \cdot R} \cdot \frac{2}{u \cdot \pi} \ln \left\{ 1 / \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot R\right) \right\}} \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここに、

$K_0$ ：初期剛性(kN/m)， $P_{\max}$ ：極限荷重(kN)， $R$ ：正規降伏比，

$u$ ：材料定数(1/m)：材料定数  $u$  については、水平載荷試験結果との対応で設定される。

図5に杭径1.5mのRC杭、節点間距離1.0m、地盤( $\rho=1.8\text{g/cm}^3, \nu=0.4, V_s150$ )におけるVesicばね11)の2倍の初期剛性および極限荷重( $P_{\max}=200\text{kN}$ )とした場合の1次元下負荷面モデルとバイリニアモデル、双曲線モデルの荷重変位関係を示す。1次元下負荷面モデルの材料定数により非線形の進行を制御でき、 $u=1500$ でバイリニアモデル、 $u=150$ で双曲線モデルに近く、 $u=20$ ではより非線形が進行する傾向が見られる。

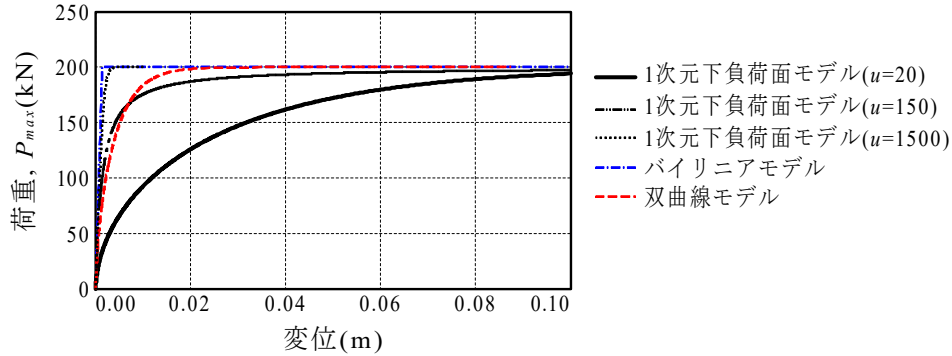


図5 1次元下負荷面モデルと非線形モデルによる荷重－変位関係の比較

#### 4. 既往の非線形モデル

ここでは、基礎指針に示されている実地盤での水平載荷試験結果から逆算した杭周地盤ばねの非線形特性（水平変位量が1cm時の水平地盤反力係数と無次元化水平変位の-0.5乗の積で表現できる）と双曲線モデルを整理して示す。変位を $\delta$ 、極限荷重を $P_{\max}$ とする。

##### (1) 基礎指針の $1/\sqrt{\delta}$ モデル

式(31)、(32)に1cm時の剛性を $K(1\text{cm})$ とした場合の基礎指針の杭周地盤ばねの非線形モデルを示す。

$$0.0 \leq \delta \leq 0.1 \text{ の場合} : K(\delta) = 3.16K(1\text{cm}) \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$0.1 > \delta \geq 0.01 \text{ の場合} : K(\delta) = K(1\text{cm}) / \sqrt{\delta / 0.01} \quad \dots\dots\dots (32)$$

##### (2) 双曲線モデル

初期剛性を $K_0$ とした場合の双曲線モデルの式を下記に示す。

$$P(\delta) = \frac{K_0}{1 + \delta / \delta_y} \cdot \delta = \frac{K_0}{1 + K_0 \cdot \delta / P_{\max}} \cdot \delta = K_0 \cdot \left( 1 - \frac{\delta}{P_{\max} / K_0 + \delta} \right) \cdot \delta \quad \dots\dots\dots (33)$$

変形( $\delta$ ) = 弾性変形( $\delta^e = P/K_0$ ) + 塑性変形( $\delta^p$ ) の関係から塑性変形は下式で表現される。

$$\delta^p = \frac{\delta}{P_{\max} / K_0 + \delta} \quad \dots\dots\dots (34)$$

#### 5. 変位に基づく下負荷面モデルの非線形性の表現

##### (1) 提案モデルの定式化

式(30)に示すように弾塑性論に基づくばねの非線形特性（1次元下負荷面モデル）の荷重－変位関係は、現在の荷重 $P$ が極限荷重 $P_{\max}$ に対してどれくらい接近しているのかを表す正規降伏比 $R$ ( $=P_{\max}/P$ ,  $0 < R < 1$ )の関数である。ここでは、1次元下負荷面モデルの式(30)を変位の関数で表現する方法を提案する。まず、式(28)を変換し、正規降伏比 $R$ を塑性変形 $\delta^p$ で表すと下式とな

る。

$$R = \frac{2}{\pi} \cdot \cos^{-1} \left\{ \exp\left(-\frac{\pi}{2} \cdot u \cdot \delta^p\right) \right\} \dots\dots\dots (35)$$

つぎに、変形量  $\delta$ ，初期剛性  $K_0$ ，極限荷重  $P_{\max}$ ，材料定数  $u$  を用いて，式(35)に対応する変形量による正規降伏比の評価式を検討する。

ここで，変形量  $\delta$  に対する塑性変形量  $\delta^p$  の比は，変形が大きくなると 1.0 となると仮定する。初期勾配  $1/b$ ，最大値  $1/a$  に漸近する下式の関数形を仮定する。(図 6 参照)

$$f = \frac{\delta^p}{\delta} = \frac{\delta}{a \cdot \delta + b} \dots\dots\dots (36)$$

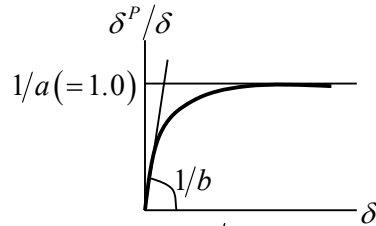


図 6 塑性変形率( $\delta^p/\delta$ )－変形( $\delta$ )関係の近似関数

塑性変形  $\delta^p$  は， $1/a=1$ ， $\delta^p = f \cdot \delta$  の関係から，下式となる。

$$\delta^p = f \cdot \delta = \frac{\delta^2}{\delta + b} \dots\dots\dots (37)$$

式(34)との整合を検討した結果，式(37)を下式と仮定する。

$$\delta^p = \frac{\delta^2}{\delta + \frac{P_{\max}}{K_0} \cdot \frac{u}{1200}} \dots\dots\dots (38)$$

式(38)を式(35)に代入すると下式となる。

$$\bar{R}(\delta) = \frac{2}{\pi} \cdot \cos^{-1} \left\{ \exp\left(-\frac{u \cdot \pi}{2} \cdot \frac{\delta^2}{\delta + \frac{P_{\max}}{K_0} \cdot \frac{u}{1200}}\right) \right\} \dots\dots\dots (39)$$

図 7 に示す式(35)と式(39)による正規降伏比と変形の関係より、両者は概ね対応している。ただし，式(39)の方が正規降伏比を幾分大きく評価するとから早期に非線形に入る傾向を示す。

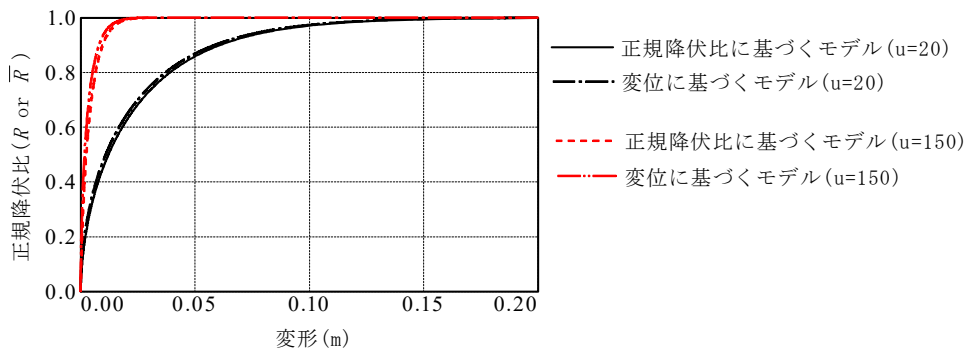


図 7 1 次元下負荷面モデルと修正モデルの正規降伏比と変形関係

式(30)の分母の枠内の塑性変形  $\delta^p$  成分は、図 8 に示すように変形量よりも小さい値となるが、簡略化のため  $\delta^p = \delta$  と仮定する。したがって、式(30)は式(40)となる。

$$P(\delta) = \frac{K_0}{1 + \frac{K_0}{P_{\max} \cdot R} \cdot \delta} \cdot \delta \quad \dots\dots\dots (40)$$

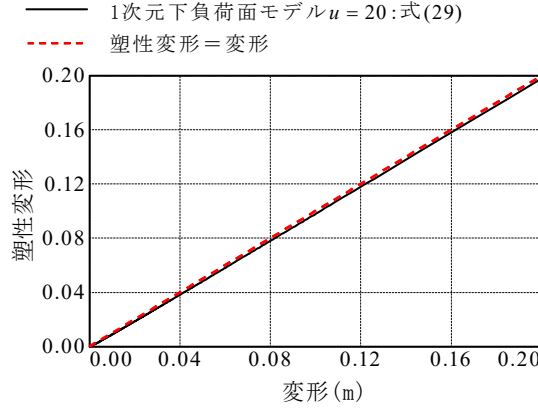


図 8 1次元下荷面モデルの塑性変形と変形関係

したがって、1次元下荷面モデルの変位に基づく提案モデルは、式(40)に式(39)を代入すると式(41)となる。

$$P(\delta) = \frac{K_0}{1 + \frac{K_0 \cdot \delta}{P_{\max}} \cdot \frac{1}{\bar{R}(\delta)}} \cdot \delta = \frac{K_0}{1 + \frac{\delta}{\delta_y} \cdot \alpha(\delta)} \quad \dots\dots\dots (41)$$

ここで、

$$\alpha(\delta) = \frac{1}{\bar{R}(\delta)} = \frac{\pi}{2 \cos^{-1} \left\{ \exp \left( -\frac{u \cdot \pi}{2} \cdot \frac{\delta^2}{\delta + \frac{P_{\max}}{K_0} \cdot \frac{u}{1200}} \right) \right\}} \quad \dots\dots\dots (42)$$

図 9 に  $B = 1.0m$ ,  $Ep = 2.1 \times 10^7 kN / m^2$ ,  $Vs = 150m / s$ ,  $\rho = 1.8t / m^3$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $P_{\max} = 300kN$  とした場合の 1次元下荷面モデルと修正モデル（式(41), (42)）の荷重－変位関係の比較を示す。なお、地盤ばねの初期剛性は式(43)を用いた。なお、双曲線モデルをあわせて示す。

$$K_0 = \frac{1.3E_s}{(1-\nu^2)} \left( \frac{E_s \cdot B^4}{E \cdot I} \right)^{1/12} \cdot 1m, \quad E_s = 2 \cdot (1+\nu) \cdot \rho \cdot Vs^2 \quad \dots\dots\dots (43)$$

## (2) 材料定数 $u$ の一考察

1次元下荷面モデルよるばねの非線形特性における材料定数  $u$  については、水平載荷試験結果等との実現象との対応で設定される。ここでは、基礎指針に示されている実地盤での水平載荷試験結果から逆算した杭周地盤ばねの非線形特性（水平変位量が 1cm 時の水平地盤反力係数と無次元化水平変位の -0.5 乗の積で表現できる）に対応する  $u$  の提案式を示す。具体的には、割線勾配の式(30)を元に剛性と極限値の無次元化した  $u$  の式(44)で 1次元下荷面モデルの極限地盤反力  $P_{\max}$  の 10%（ $R = 0.1$ ）における水平変位が  $1/\sqrt{\delta}$  モデルと対応するように初期パラメータ

$K^*, P_{\max}^*$  の検討を行った。

検討の結果、初期パラメータ  $K^* = 1.45 \times 10^5 \text{ kN/m}$ ,  $P_{\max}^* = 300$  より、 $u$  の提案式は式(45)になる。

$$u(K_0, P_{\max}) = 20 \cdot \frac{K_0}{K_0^*} \times \frac{P_{\max}}{P_{\max}^*} \times \frac{K_0/P_{\max}}{K_0^*/P_{\max}^*} \times \frac{\ln\{1/\cos(\pi/2 \cdot R)\}}{\ln\left\{1/\cos\left(\pi/2 \cdot \frac{P_{\max}}{P_{\max}^*} \cdot R\right)\right\}} \dots\dots\dots (44)$$

$$u(K_0, P_{\max}) = 20 \cdot \left(\frac{K_0}{145000}\right)^2 \times \frac{\ln\{1/\cos(\pi/20)\}}{\ln\left\{1/\cos\left(\frac{\pi \cdot P_{\max}}{6000}\right)\right\}} \dots\dots\dots (45)$$

図 10 に  $B = 1.0\text{m}$ ,  $Ep = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ ,  $Vs = 200\text{m/s}$ ,  $\rho = 1.8\text{t/m}^3$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $P_{\max} = 900\text{kN}$  とした場合の式(45)の  $u$  の提案式を用いた 1 次元下負荷面モデルと基礎指針モデルの荷重－変位関係を示す。R=0.1 と基礎指針モデルの変形量 0.01m は概ね対応している。

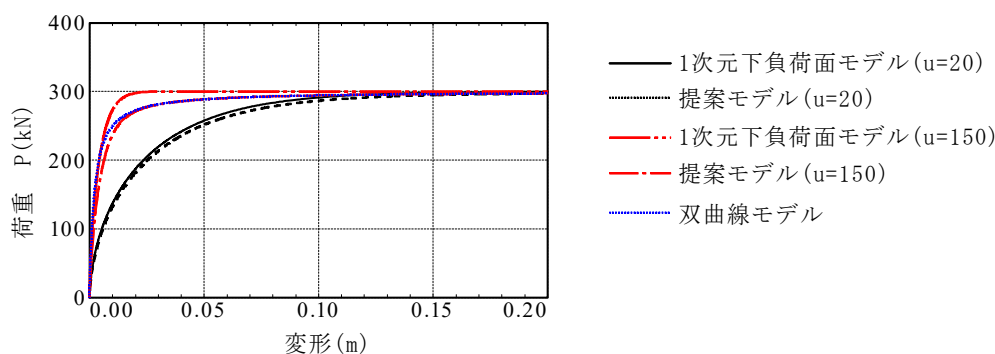


図 9 1 次元下負荷面モデルと修正モデルの荷重－変形関係

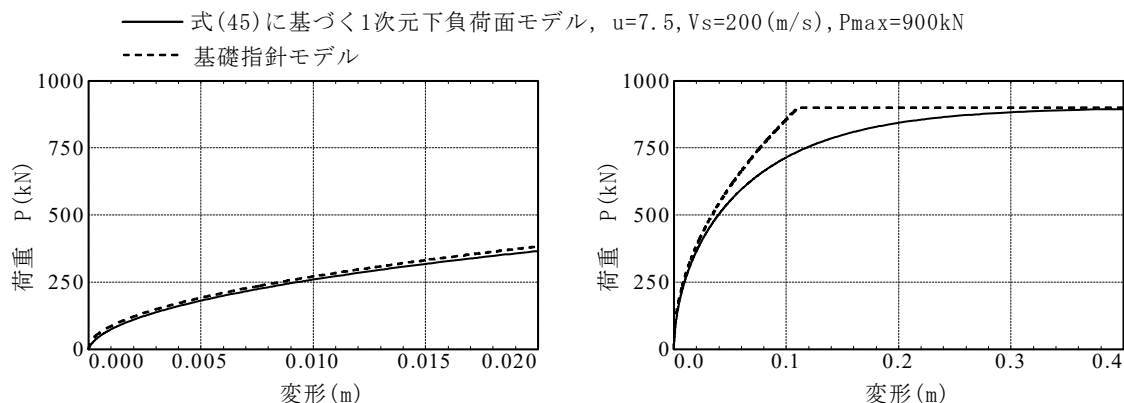


図 10 式(45)を用いた 1 次元下負荷面モデルと基礎指針モデルの比較

## 6. まとめ

非古典弾塑性理論に基づく 3 次元下負荷面モデルの定式化から 1 次元状態の定式化を示し、次に 1 次元のばねに適用するために変位－荷重関係が正規降伏比 ( $R$ ) の関数で表現される 1 次元下負荷面モデルの定式化を示した。さらに、既往のばねの非線形モデルは変位の関数であること



から、正規降伏比 ( $R$ ) の関数から変位の関数に基づく 1 次元下負荷面モデルの提案し、荷重－変位関係の比較を行い、変位の関数に基づく 1 次元下負荷面モデルの有効性を確認した。また、基礎指針に示されている非線形モデルを 1 次元下負荷面モデルで評価する場合の材料定数  $u$  の評価式の提案を行った。今後、地震時のように繰り返し荷重が作用する場合の評価を行うため、繰り返し挙動を考慮できる 1 次元下負荷面モデルの定式化を行う必要がある。

## 謝辞

本論文の執筆にあたりご指導いただきました橋口公一九州大学名誉教授に感謝申し上げます。

## 参考文献

- 1) 日本建築学会：建築基礎構造設計指針 2019 改定, 2019. 11.
- 2) 岸田英明, 中井正一: 地盤反力－変位関係の非線形性, 土と基礎, Vol. 25, No. 8, PP. 21－28, 1977. 8
- 3) 日本建築学会：建物と地盤の相互作用を考慮した応答解析と耐震設計, 2006. 2.
- 4) 吉川那穂, 鈴木康嗣, 小林恒一, 金井重夫, 阿部幸夫: 既往の水平載荷実験結果に基づく単杭の  $p$ - $y$  関係の再検討, 日本建築学会技術報告集, Vol. 17, pp. 95－100, 2011. 2.
- 5) Hashiguchi K., Ueno M.: Elastoplastic constitutive laws of granular materials, Constitutive equations of soils. In: Murayama S, Schofield AN (eds) Proceedings of 9th international conference soil mechanics and foundation engineering Spec. Ses. vol 9, Tokyo, JSSMFE, pp. 73-82, 1977.
- 6) Hashiguchi K.: Plastic constitutive equations of granular materials. In: Cowin SC, Satake M (eds) Proceedings of US-Japan seminar on continuum mech statistical approach mechanics granular materials, Sendai, pp. 321-329, 1978.
- 7) Hashiguchi K.: Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, J. Appl. Mech. (ASME), 47, pp. 266-272, 1980.
- 8) Hashiguchi K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, Int. J. Solids Structures, 25, pp. 917-945, 1989.
- 9) 間瀬辰也, 橋口公一, 中井正一, 土方勝一郎, 杉山達也, 柳下文雄: 下負荷面モデルを用いた単杭の水平挙動の 3 次元弾塑性解析, 日本建築学会構造系論文集, No. 626, pp. 575－582, 2008. 4.
- 10) Tsutsumi, S., Toyosada, M. and Hashiguchi, K.: Extended subloading surface model incorporating elastic limit concept, Proc. Plasticity ' 06, Halifax, pp. 217-219, 2006.
- 11) Vesic, A.B.: Bending of Beams Resting on Isotropic Elastic Solid, Proc. ASCE, Vol. 87 (EM2), pp. 35－53, 1961. 4.