

# 土の繰返し載荷時の等方硬化停滞現象を考慮した 下負荷面モデルの検討

Study on subloading surface model considering stagnation behavior  
in cyclic loading of soil

間瀬 辰也\*, 橋口 公一\*\*  
MASE Tatsuya HASHIGUCHI Koichi

In this paper, an extended subloading surface model is presented that considers the isotropic hardening stagnation phenomenon observed in cyclic loading of metals in the stress space of the ground. As the material function of the soil, the yield function including tensile strength region, the stress-dependent equation of sand which is commonly used to set the elastic modulus, and the gradient of normal consolidation line and swelling line in both logarithmic isotropic consolidation diagrams are adopted.

The effect of isotropic hardening stagnation region is confirmed by cyclic loading analysis under undrained condition of soil with the proposed model.

## 1. はじめに

筆者ら<sup>1)</sup>は飽和地盤の液状化時のサイクリック現象を説明するため、下負荷面モデルを用いた弾塑性構成モデルを提案しているが、液状化現象におけるS字形の偏差応力-ひずみ曲線およびサイクリック現象を表現するために多くの材料パラメータを必要としている。ところで、金属が繰返し負荷を受ける場合の逆負荷に際して、再降伏時の初期段階において単調負荷過程に比べて等方硬化の進展が鈍る現象 (workhardening stagnation) が見られる。このような現象を表現するために Chaboche ら<sup>2)</sup>による塑性ひずみ記憶面の概念を修正して、Ohno・Kachi<sup>3)</sup>により、塑性ひずみ空間において、塑性ひずみがある領域内にあるとき、等方硬化を鈍化させ、また、その領域が繰返し負荷とともに拡大する”等方非硬化領域”の概念が提案された。その後、Yoshida・Uemori<sup>4)</sup>は、背応力が応力空間によるある領域内にあるときには等方硬化が生じないという考えに基づく定式化を行っている。橋口は塑性ひずみ空間および応力空間に対して下負荷面の概念に基づいて定式化を行っている<sup>5),6)</sup>。本論文では金属に適用されている応力空間における等方硬化停滞現象を地盤の繰返し弾塑性モデルに適用した場合に、応力-ひずみ関係に与える影響を確認することを目的とする。

## 2. 下負荷面モデルによる地盤の繰返し等方硬化鈍化を考慮した弾塑性構成式

下負荷面モデル<sup>7),8)</sup>は降伏面 (以下、正規降伏面と称す) の内部の応力変化による塑性変形を表現し得る非古典弾塑性構成式である。応力が正規降伏面に接近するにつれて塑性ひずみ速度が発展するとするものであるが、現応力点を通して正規降伏面に相似な面を仮定する。したがって、下負荷面モデルにおいては、滑らかな負荷に対して、常に接線係数の滑らかな変化が表現される。下負荷面モデルは塑性変形挙動の表現の妥当性および数値計算の単純さ、堅牢さの両面において、他モデルに対して優位性がある。

### 2.1 ひずみ速度

物質粒子の配置を  $\mathbf{x}$ 、速度を  $\mathbf{v}$  とし、速度勾配  $\mathbf{l} = \partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{x}$  の対称部分  $\mathbf{d} \equiv (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) / 2$  はひずみ速

\* 居住空間デザイン学科 教授

\*\* 九州大学 名誉教授

度、反対称部分  $\mathbf{W} \equiv (\mathbf{I} - \mathbf{I}^T)/2$  は連続体スピンを表す。また、微小ひずみに限定し、ひずみ速度  $\mathbf{d}$  は、弾性ひずみ速度  $\mathbf{d}^e$  と塑性ひずみ速度  $\mathbf{d}^p$  に加算分解されるとする。

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \quad (1)$$

弾性ひずみ速度は、つぎの亜弾性式<sup>9)</sup>で応力速度に線形に関係づけられる。

$$\mathbf{d}^e = \mathbf{E}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2)$$

本論文では、微小変形への制限の基に、亜弾性式を採用して弾塑性構成式の定式化を行う。また、応力・ひずみ（速度）の符号は、引張・伸張を正とする。

## 2.2 拡張下負荷面モデル

繰返し負荷挙動を表現するために、正規降伏面に対する下負荷面の相似中心を塑性変形とともに移動させるように拡張された構成式を示す。

### (1) 正規降伏面および下負荷面

図1に繰返し負荷挙動を合理的に表現し得る下負荷面モデルの  $(p, q)$  面における回転状態の正規降伏面、下負荷面、弾性核面、限界弾性核面を示す。

土に対する降伏面（“正規降伏面”（normal-yield surface）に改称）は、次式で与えられる。

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = F(H) \quad (3)$$

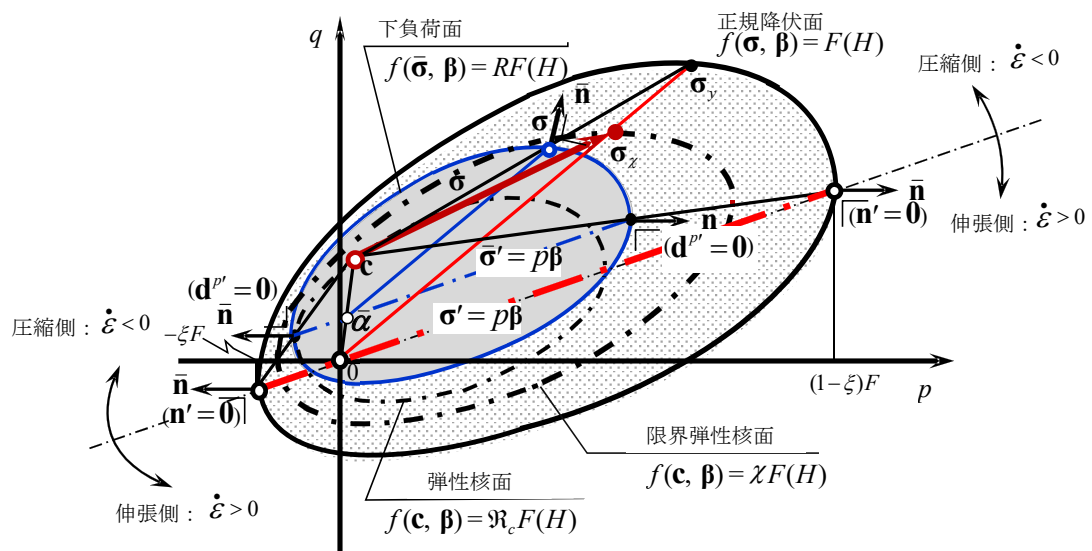


図1  $(p, q)$  面における回転状態の正規降伏面、下負荷面、弾性核面、限界弾性核面

ここに、 $F$  は降伏面の大きさを表し、等方硬化変数  $H$  の関数で、硬化関数と呼ばれる。 $\boldsymbol{\beta}$  は正規降伏面、下負荷面の回転を表す回転硬化変数である。 $f$  は、 $\boldsymbol{\sigma}$  の1次の同次関数で、任意のスカラー変数  $s$  に対して  $f(|s|\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = |s|f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta})$  を満たす。したがって、 $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$  であれば、降伏面は応力空間の原点  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  を中心に相似形を維持して拡大・縮小する。

降伏面の内部における応力変化による塑性ひずみ速度を表現するため、応力が降伏面に近づくにつれて、塑性ひずみ速度が発展すると仮定する。そこで、現応力点を通して正規降伏面に相似形を有し同じ向きを有する下負荷面を導入する。なお、正規降伏面に対する下負荷面の大きさの比を“正規降伏比”と呼び、記号  $R$  ( $0 \leq R \leq 1$ ) で表す。正規降伏比は、応力の正規降伏面への接近の度合を表す。これにより、下負荷面は次式で表される。

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta}) = RF(H) \quad (4)$$

ここに、

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\alpha}} = R\boldsymbol{\sigma}_y = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + R\mathbf{c}, \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}} \equiv (1-R)\mathbf{c} \quad [\bar{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{c} = R(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{c}); \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}], \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{c} \quad (5)$$

$\mathbf{c}$ は正規降伏面と下負荷面の“相似中心”(similarity-center)である。応力が相似中心に一致しているとき、つまり、 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}$  ( $R=0$ )であるとき、最も弾性的な応答が示される(以下、 $\mathbf{c}$ を“弾性核”(elastic-core)と称す。) $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ は、正規降伏面内の応力ゼロ点 $\boldsymbol{\sigma}(\equiv \mathbf{0})$ に対する下負荷面内の共役応力点である。また、 $\boldsymbol{\sigma}_y$ は、下負荷面上の現応力 $\boldsymbol{\sigma}$ に対する正規降伏面上の共役応力点である。 $(p, q)$ 面におけるこれらの関係を図1に示している。

式(4)の時間微分は次式で与えられる。

$$\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \beta)}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \beta)}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}} + \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \beta)}{\partial \beta} : \dot{\beta} = \dot{R}F + R\dot{F} \quad (6)$$

本式は、Eulerの同次関数の定理に基づき次式となる。

$$\bar{\mathbf{n}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \bar{\mathbf{n}} : \left[ \dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}} + \frac{\dot{F}}{F}\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\dot{R}}{R}\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{RF} \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \beta)}{\partial \beta} : \dot{\beta} \right) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right] = 0 \quad (7)$$

ここに、

$$\bar{\mathbf{n}} \equiv \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \beta)}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} / \left\| \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \beta)}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right\| \quad (\|\bar{\mathbf{n}}\|=1) \quad (\|\cdot\| \text{は大きさを示す。}) \quad (8)$$

式(7)に含まれる $\dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}$ は、式(5)<sub>2</sub>から次式で与えられる。

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}} = (1-R)\dot{\mathbf{c}} - \dot{R}\mathbf{c} \quad (9)$$

## (2) 正規降伏面被の発展則

(1)項の下負荷面の基本概念に基づいて正規降伏比 $R$ の発展則を下式に示す。

$$\dot{R} = U(R) \|\mathbf{d}^p\| \quad \text{for } \mathbf{d}^p \neq \mathbf{0} \quad (10)$$

ここに、 $U$ は次式を満たす $R$ の単調減少関数である。

$$U(R) \begin{cases} \rightarrow +\infty & \text{for } R = 0: \text{quasi-elastic state} \\ > 0 & \text{for } R < 1: \text{sub-yield state} \\ = 0 & \text{for } R = 1: \text{normal-yield state} \\ < 0 & \text{for } R > 1: \text{over normal-yield state} \end{cases} \quad (11)$$

式(10)、(11)<sub>4</sub>により、 $R > 1$ のとき $\dot{R} < 0$ の関係が付与されているため、塑性負荷状態において、応力は自動的に正規降伏面に引き付けられる。関数 $U$ として、式(11)を満たす次式を仮定する。図2に正規降伏比の発展則の関数 $U(R)$ を示す。

$$U(R) = u \cot\left(\frac{\pi}{2}R\right) \quad (12)$$

ここに、 $u$ は一般に材料パラメータである。

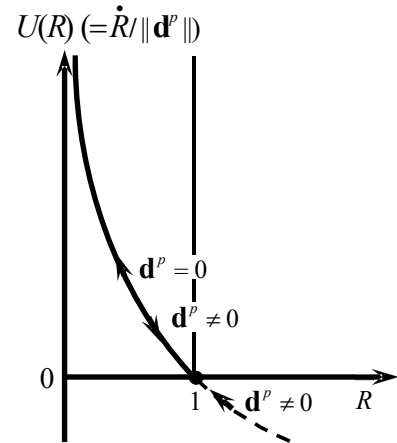


図2 正規降伏比の発展則の関数 $U(R)$

## (3) 弾性核

最も弾性的な応力である相似中心(弾性核)が正規降伏面上に位置すると物理現象の観点から不自然な極端な塑性変形が発生すること、及び数値解析上の下負荷面を決定できない問題が生じる。そのため弾性核を通して、応力ゼロ点に関して正規降伏面に相似な次式で表される“弾性核面”(elastic-

core surface)を導入する。

$$f(\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta}) = \mathcal{R}_c F(H), \text{ i.e. } \mathcal{R}_c = f(\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta}) / F(H) \quad (13)$$

ここに、 $\mathcal{R}_c$  ( $0 \leq \mathcal{R}_c \leq 1$ ) は、正規降伏面に対する弾性核面の大きさの比で、“弾性核降伏比” (elastic-core yield ratio) と呼ばれ、正規降伏面への弾性核の接近の度合を表す。弾性核が正規降伏面に達することは許されないため、弾性核降伏比は 1 未満でなければならない。

$$f(\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta}) \leq \chi F(H), \text{ i.e. } \mathcal{R}_c \leq \chi \quad (14)$$

ここに、 $\chi$  ( $< 1$ ) は弾性核降伏比  $\mathcal{R}_c$  の最大値を示す材料定数である。弾性核  $\mathbf{c}$  がその最外面  $f(\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta}) = \chi F(H)$  に存在する限界状態において、式(14)を物質時間微分し、Euler の同次 (1 次) 関数の定理に基づく関係により、次式を得る。

$$\frac{\partial f(\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \mathbf{c}} : \left[ \dot{\mathbf{c}} + \left( \frac{1}{\chi F} \frac{\partial f(\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} : \dot{\boldsymbol{\beta}} - \frac{\dot{F}}{F} \right) \mathbf{c} \right] \leq 0 \text{ for } \mathcal{R}_c = \chi \quad (15)$$

不等式(15)を満たす次式を仮定する。

$$\dot{\mathbf{c}} + \left( \frac{1}{\chi F} \frac{\partial f(\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} : \dot{\boldsymbol{\beta}} - \frac{\dot{F}}{F} \right) \mathbf{c} = c_e \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| (\boldsymbol{\sigma}_\chi - \mathbf{c}) \quad (16)$$

ここに、 $c_e$  は材料定数である。 $\boldsymbol{\sigma}_\chi$  は下負荷面上にある現応力  $\boldsymbol{\sigma}$  の限界弾性核面上の共役応力である。

$$\dot{\mathbf{c}} = c_e \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| \left( \frac{\chi}{R} \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{c} \right) + \left( \frac{\dot{F}}{F} - \frac{1}{\chi F} \frac{\partial f(\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} : \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \mathbf{c} \quad (17)$$

式(17)を式(9)に代入して、次式を得る。

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}} = (1-R) \left[ c_e \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| \left( \frac{\chi}{R} \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{c} \right) + \left( \frac{\dot{F}}{F} - \frac{1}{\chi F} \frac{\partial f(\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} : \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \mathbf{c} \right] - \dot{R} \mathbf{c} \quad (18)$$

#### (4) 適合条件

式(18)を式(7)に代入し、 $\bar{\boldsymbol{\sigma}} + (1-R)\mathbf{c} = \boldsymbol{\sigma}$ 、 $\bar{\boldsymbol{\sigma}} - R\mathbf{c} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}$  を考慮すると適合条件は次式となる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}} : \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} - \bar{\mathbf{n}} : \left[ c_e (1-R) \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| \left( \frac{\chi}{R} \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{c} \right) + \frac{\dot{F}}{F} \boldsymbol{\sigma} + \frac{\dot{R}}{R} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right. \\ \left. - \frac{1}{RF} \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} : \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1-R}{\chi F} \left( \frac{\partial f(\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} : \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \mathbf{c} \right] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

#### (5) 塑性ひずみ速度

下負荷面モデルに関連流動則を適用する。

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \bar{\mathbf{n}} \quad (\dot{\lambda} > 0) \quad (20)$$

ここに、 $\dot{\lambda}$  は正値の比例係数である。

式(10)および式(20)を式(19)に代入して、次式を得る。

$$\bar{\mathbf{n}} : \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} - \dot{\lambda} \bar{M}^p = 0 \quad (21)$$

ここに、

$$\bar{M}^p \equiv \bar{\mathbf{n}} : \left[ \frac{F' h}{F} \boldsymbol{\sigma} + \frac{U}{R} \hat{\boldsymbol{\sigma}} + c(1-R) \left( \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}} \chi}{R} - \mathbf{c} \right) - \frac{1}{RF} \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} : \mathbf{b} \right) \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1-R}{\chi F} \left( \frac{\partial f(\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} : \mathbf{b} \right) \mathbf{c} \right] \quad (22)$$

$$F' \equiv dF / dH, \quad h \equiv \dot{H} / \dot{\lambda}, \quad \mathbf{b} \equiv \dot{\boldsymbol{\beta}} / \dot{\lambda} \quad (23)$$

式(21)より、次式が成り立つ。

$$\dot{\lambda} = \frac{\bar{\mathbf{n}} : \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}}{\bar{M}^p} \quad (24)$$

式(2)、(20)、(24)を式(1)に代入して、ひずみ速度は次式で与えられる。

$$\mathbf{d} = \mathbf{E}^{-1} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\bar{\mathbf{n}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}}{\bar{M}^p} \bar{\mathbf{n}} \quad (25)$$

ひずみ速度で表された関連流動則における正值の比例係数  $\dot{\Lambda}$  は次式で与えられる。

$$\dot{\Lambda} = \frac{\bar{\mathbf{n}} : \mathbf{E} : \mathbf{d}}{\bar{M}^p + \bar{\mathbf{n}} : \mathbf{E} : \bar{\mathbf{n}}} \quad (26)$$

式(25)に式(26)を用いて、応力速度は次式で表される。

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E} : \mathbf{d} - \frac{\bar{\mathbf{n}} : \mathbf{E} : \mathbf{d}}{\bar{M}^p + \bar{\mathbf{n}} : \mathbf{E} : \bar{\mathbf{n}}} \mathbf{E} : \bar{\mathbf{n}} = \left( \mathbf{E} - \frac{(\mathbf{E} : \bar{\mathbf{n}}) \otimes (\bar{\mathbf{n}} : \mathbf{E})}{\bar{M}^p + \bar{\mathbf{n}} : \mathbf{E} : \bar{\mathbf{n}}} \right) : \mathbf{d} \quad (27)$$

## (6) 再負荷特性の改善

材料パラメータ  $u$  を次のように拡張する。

$$u = \bar{u} \exp(u_c \mathcal{H}_c C_\sigma) \quad (\bar{u} \exp(-u_c \chi) \leq u \leq \bar{u} \exp(u_c \chi)) \quad (28)$$

$$= \begin{cases} \bar{u} \exp(u_c \chi) & (\text{largest}) \text{ for } \mathcal{H}_c = 1 \text{ and } C_\sigma = 1 \\ \bar{u} & (\text{largest}) \text{ for } \mathcal{H}_c = 0 \text{ or } C_\sigma = 0 \\ \bar{u} \exp(-u_c \chi) & (\text{smallest}) \text{ for } \mathcal{H}_c = \chi \text{ and } C_\sigma = -1 \end{cases}$$

$$C_\sigma \equiv \mathbf{n}_c : \bar{\mathbf{n}} \quad (-1 \leq C_\sigma \leq 1), \quad \mathbf{n}_c \equiv \frac{\partial f(\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \mathbf{c}} / \left\| \frac{\partial f(\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \mathbf{c}} \right\| \quad (\|\mathbf{n}_c\| = 1) \quad (29)$$

ここに、 $\bar{u}$  および  $u_c$  は材料パラメータであるが、前者は  $u$  の平均値に相当する。これにより、 $u$  は負荷方向に増大し、その逆負荷方向には低下する。ゆえに、部分除荷後の再負荷曲線が初期負荷曲線に速やかに復帰する現象が現実的に表現される。式(28)の下の括弧内には、現応力が弾性核から見て、弾性核面の外向き法線、接線、内向き法線方向の場合について示している。

## (7) 等方硬化鈍化

土の正規等方硬化面 (normal-isotropic hardening surface) を応力空間の原点から始まる円錐形を仮定し、次式で与える。

$$g(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \hat{K}_\beta, \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma} \quad (30)$$

$\hat{K}_\beta$ 、 $\boldsymbol{\gamma}$  ( $= \boldsymbol{\gamma}'$ ) は、正規等方硬化面の大きさとその中心である。正規等方硬化面の下負荷面を下式で与える。

$$g(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \hat{R} \hat{K}_\beta \quad (31)$$

ここに、 $\hat{R}$  ( $0 \leq \hat{R} \leq 1$ ) は、正規等方硬化面に対する等方硬化面の大きさの比で、“正規等方硬化比” (normal-isotropic hardening ratio) である。正規等方硬化比は、既知の  $\boldsymbol{\beta}$ 、 $\boldsymbol{\gamma}$  および  $\hat{K}_\beta$  より、 $\hat{R} = g(\hat{\boldsymbol{\beta}}) / \hat{K}_\beta$  より計算される。式(31)の適合条件を下式に示す。

$$\frac{\partial g(\hat{\boldsymbol{\beta}}) : \dot{\hat{\boldsymbol{\beta}}}}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} - \frac{\partial g(\hat{\boldsymbol{\beta}}) : \dot{\boldsymbol{\beta}}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \hat{R} \dot{\hat{K}}_\beta + \hat{R} \dot{\hat{K}}_\beta \quad (32)$$

$\hat{K}_\beta$ 、 $\boldsymbol{\gamma}$  に下記の仮定を行う。

- 1) 回転硬化変数増分が下負荷等方硬化面の外向きの場合に増加する。  $\frac{\partial g(\hat{\boldsymbol{\beta}}) : \dot{\hat{\boldsymbol{\beta}}}}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} > 0$
- 2) 回転硬化変数が正規等方硬化面に近づくと増加し、正規等方硬化比  $\hat{R}$  も増加する。したがって、 $\hat{K}_\beta$ 、 $\boldsymbol{\gamma}$  は  $\hat{R}$  の単調増加関数で与えられる。
- 3) 回転硬化変数  $\boldsymbol{\beta}$  は、正規等方硬化面内に存在する。したがって、 $\dot{\hat{R}} = 0$  for  $\hat{R} = 1$  である。

上記の仮定より  $\hat{K}_\beta$ 、 $\boldsymbol{\gamma}$  の発展則を次に示す。

$$\dot{\hat{K}}_\beta = C\hat{R}^\varepsilon \langle \hat{\mathbf{n}}_\beta : \dot{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \rangle \left\| \frac{\partial g(\hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} \right\|, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = (1-C)\hat{R}^\varepsilon \langle \hat{\mathbf{n}}_\beta : \dot{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \rangle \hat{\mathbf{n}}_\beta, \quad \hat{\mathbf{n}}_\beta \equiv \frac{\partial g(\hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} / \left\| \frac{\partial g(\hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} \right\| \quad (33)$$

正規等方硬化面は、 $C=1$ の場合には移動せず膨張し、 $C=0$ の場合には膨張せず移動する。

### 2.3 地盤の材料関数

岩・砂・粘土およびセメント改良土などの幅広い地盤を対象とする材料関数を示す。

#### (1) 弾性係数

体積弾性係数  $K$  およびせん断弾性係数  $G$  は次式で与えられる。

$$K = \frac{-\dot{p}}{d_v^\varepsilon} = \frac{p + \mathcal{G}F}{\tilde{\kappa}}, \quad G = \frac{\|\dot{\boldsymbol{\sigma}}'\|}{2\|\mathbf{d}^{e'}\|} = G_0 \left( \frac{p + \mathcal{G}F}{p_0 + \mathcal{G}F_0} \right)^n \quad (34)$$

ここに、 $\tilde{\kappa}$  は、両対数  $(\ln v - \ln p)$  ( $v$ : 体積) 等方圧密図における膨潤線の勾配である。引張領域にも対応可能な  $K$  と  $G$  とするために  $\mathcal{G}F$  を導入している。ここに、 $\mathcal{G}$  は材料定数で、 $p \rightarrow -\mathcal{G}F$  のとき  $d_v^\varepsilon \rightarrow \infty$  となる関係から設定する。一般的な粘土や砂の場合  $\mathcal{G}$  ( $0 \leq \mathcal{G} < 0.1$ ) である。 $d_v^\varepsilon$  は弾性体積ひずみ速度 ( $d_v^\varepsilon \equiv \text{tr} \mathbf{d}^e$ ) である。べき乗  $n$  ( $\leq 1$ ) は材料定数で一般的な砂で  $n \equiv 0.5$  である

#### (2) 引張強度領域を含む降伏関数

引張強度を有する地盤材料に適用するため修正 Cam-Clay の降伏面を  $\xi F$  ( $p \rightarrow p + \xi F$ ) ずらした降伏関数<sup>10)</sup>を次式に示す。図 3 に式(35)の圧力-偏差応力空間を示す。

$$\left[ \frac{p - ((1/2) - \xi)F}{F/2} \right]^2 + \left[ \frac{\|\boldsymbol{\sigma}'\|}{MF/2} \right]^2 = 1 \quad (35)$$

ここに、 $\xi$  は材料定数で、圧縮強度より引張強度が小さいため  $\xi \leq 1/2$  である。また、体積が無限大にならないために  $\xi < \mathcal{G}$  ( $p \geq -\xi F > -\mathcal{G}F$ ) である。

下負荷面応力関数を次式で与える。

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\boldsymbol{\beta}}) = f(\bar{p}, \bar{\rho}) = \begin{cases} \bar{p}[1 + (\bar{\rho}/\bar{p})]^2 & \text{for } \xi = 0 \\ \frac{1}{\xi}(\bar{p}_\rho - \bar{\xi}\bar{p}) & \text{for } \xi \neq 0 \end{cases} \quad (36)$$

ここに、

$$\bar{\xi} \equiv 2(1 - \xi)\xi, \quad \bar{\xi} \equiv 1 - 2\xi, \quad \bar{p}_\rho \equiv \sqrt{\bar{p}^2 + 2\bar{\xi}\bar{\rho}^2} \quad (\bar{p} \equiv -(\text{tr} \bar{\boldsymbol{\sigma}})/3), \quad \bar{\rho} \equiv \frac{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}'\|}{\hat{M}}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}' \equiv \bar{\boldsymbol{\sigma}}' - \bar{p}\mathbf{c} \quad (37)$$

$$\hat{M}(\cos 3\theta_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}) = \frac{14\sqrt{6} \sin \phi_c}{(3 - \sin \phi_c)(8 + \cos 3\theta_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}})}, \quad \cos 3\theta_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \equiv \sqrt{6} \text{tr} \hat{\boldsymbol{\rho}}'^3, \quad \hat{\boldsymbol{\rho}}' \equiv \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}'}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}'\|} \quad (38)$$

$\phi_c$  は軸対称 (3 軸) 圧縮状態における限界状態線を示す摩擦角である。また、 $\xi$  ( $< 0.5$ ) は材料定数である。なお、式(36)において  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}$  とおくことにより、式(3)における正規降伏応力関数  $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta})$  の具体形が表現される。本場合の正規降伏面は、3次元主応力空間で楕円体で表される修正 Cam-clay モデルに中間主応力つまり偏差応力の第3不変量の影響を考慮して、負圧方向に  $-\xi F$  だけ平行移動された降伏面で表される。したがって、正規降伏面は、応力空間の原点を中心に拡大・縮小し、等方圧縮および引張方向にそれぞれ  $(1 - \xi)F$  および  $\xi F$  のサイズを有する (図 1 参照)。図 4 に  $\pi$  平面による降伏面の断面形状を示す。

式(3)または(4)の硬化関数を次式で与える<sup>11)</sup>。

$$F(H) = F_0 \exp\left(\frac{H}{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}\right), \quad F' \equiv \frac{dF}{dH} = \frac{1}{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}} F \quad (39)$$



$\tilde{\lambda}, \tilde{\kappa}$  は、両対数 ( $\ln v - \ln p$ ) 等方圧密図における正規圧密線及び膨潤線の勾配である。

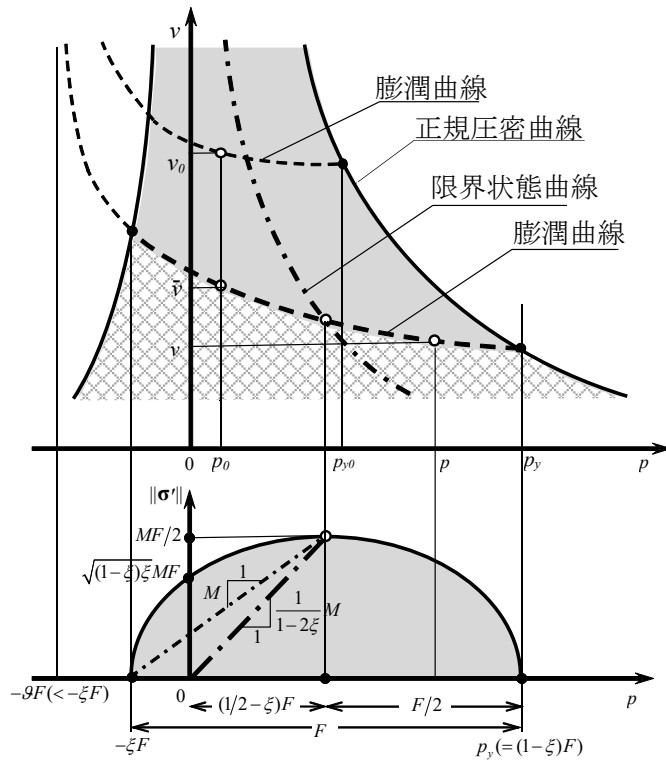
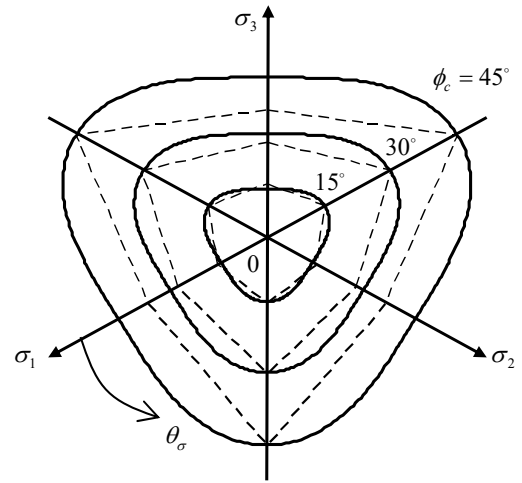


図3 引張強度を含む土の降伏面



実線：式(38)による断面形状

破線：Mohr-Coulombモデルによる断面形状

図4 π平面による降伏面の断面形状

### (3) 回転硬化変数

摩擦性材料においては、金属で用いられている移動硬化の概念は適用できないため関口・太田によって提案された地盤の回転硬化<sup>12)</sup>を導入している。既往の式<sup>10)</sup>を改善して、回転硬化則を次式で与える。

$$\boldsymbol{\beta} = br \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{1}{\hat{M}_r} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| \boldsymbol{\beta} \right) = \mathbf{f}_{\beta\bar{n}} \dot{\lambda} \quad (40)$$

ここに、

$$\hat{M}_r (\cos 3\theta_{\hat{\sigma}}) = \frac{14\sqrt{6} \sin \phi_r}{(3 - \sin \phi_r)(8 + \cos 3\theta_{\hat{\sigma}})}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}' \equiv \hat{\boldsymbol{\sigma}}' - \bar{p}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{t}'_{\hat{\sigma}} \equiv \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}'}{\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}'\|}, \cos 3\theta_{\hat{\sigma}} \equiv \sqrt{6} \text{tr} \mathbf{t}'_{\hat{\sigma}}{}^3 \quad (41)$$

$$\mathbf{f}_{\beta\bar{n}} \equiv b_r \left( \bar{\mathbf{n}}' - \frac{1}{\hat{M}_r} \|\bar{\mathbf{n}}'\| \boldsymbol{\beta} \right) \quad (42)$$

### (4) 等方硬化面

土の等方硬化面を偏差応力の第三不変量に依存すると仮定し、下式に示す。

$$g(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \left\{ 1 + (1/8) \cos 3\theta_{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \right\} \|\hat{\boldsymbol{\beta}}\|, \cos 3\theta_{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \equiv \sqrt{6} \text{tr} \mathbf{t}'_{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^3, \mathbf{t}'_{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \equiv \frac{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\|\hat{\boldsymbol{\beta}}\|} \quad (43)$$

$$\frac{\partial g(\hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} = (3\sqrt{6}/8) \|\hat{\boldsymbol{\beta}}\| \mathbf{t}'_{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{}^2 + [1 + (1/8) \cos 3\theta_{\hat{\boldsymbol{\beta}}}] \frac{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\|\hat{\boldsymbol{\beta}}\|} \quad (44)$$

### (5) 等方硬化変数

等方硬化変数  $H$  の発展則は、塑性体積ひずみ速度、Nova<sup>13)</sup> および Wilde<sup>14)</sup> による偏差塑性ひずみ速度による硬化・軟化に加え、等方硬化停滞を考慮するために次の仮定を行う。

1) 等方硬化は回転硬化速度の向きが下等方硬化面の外側の場合に増加する。

$$\dot{H} \begin{cases} > 0 & \text{for } \hat{\mathbf{n}} : \dot{\boldsymbol{\beta}} > 0 \\ = 0 & \text{for } \hat{\mathbf{n}} : \dot{\boldsymbol{\beta}} \leq 0 \end{cases} \quad (45)$$

2) 等方硬化速度は、回転硬化変数が正規等方硬化面に近づくと増加し、正規等方硬化比  $\hat{R}$  も増加する。したがって、等方硬化速度は  $\hat{R}$  の単調増加関数で与えられる。

3) 回転硬化変数が正規等方硬化面上 ( $\hat{R}=1$ ) および塑性ひずみ速度が正規等方硬化面の外向きの場合、単調載荷時の等方硬化の挙動に一致する。

上記の仮定により等方硬化の発展則を次に示す。

$$\dot{H} = \hat{R}^{\nu} \left\langle \hat{\mathbf{n}}_{\beta} : \frac{\mathbf{f}_{\beta\bar{n}}}{\|\mathbf{f}_{\beta\bar{n}}\|} \right\rangle f_{H\bar{n}} \dot{\lambda} \quad (46)$$

$$f_{H\bar{n}} \dot{\lambda} = -\dot{\varepsilon}_v^p + \mu_d \|\dot{\varepsilon}^{p'}\| \frac{\|\boldsymbol{\sigma}'\| - M_d P}{F}, \quad f_{H\bar{n}} = -\text{tr}\mathbf{n} + \mu_d \|\mathbf{n}'\| \frac{\|\boldsymbol{\sigma}'\| - M_d P}{F} \quad (47)$$

### (6) 塑性係数

式(22)に式(46)を代入して、等方硬化鈍化を考慮した塑性係数を次式に示す。

$$\begin{aligned} \bar{M}^p \equiv \bar{\mathbf{n}} : & \left[ \frac{F'}{F} \hat{R}^{\nu} \left\langle \hat{\mathbf{n}}_{\beta} : \frac{\bar{\mathbf{f}}_{\beta n}}{\|\bar{\mathbf{f}}_{\beta n}\|} \right\rangle f_{H\bar{n}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{U}{R} \bar{\boldsymbol{\sigma}} + c(1-R) \left( \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}} \chi}{R} - \mathbf{c} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{RF} \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} : \mathbf{f}_{\beta\bar{n}} \right) \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1-R}{\chi F} \left( \frac{\partial f(\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} : \mathbf{f}_{\beta\bar{n}} \right) \mathbf{c} \right] \end{aligned} \quad (48)$$

### 3. 計算例

図5に Workhardening stagnation を考慮しない場合と考慮した場合の偏差応力-軸ひずみ関係を示す。Stagnation 効果により、除荷後の等方硬化停滞による影響が確認された。

下負荷面モデルのパラメータを下記に示す。

$$F_0 = 150 \text{ (kPa)}, \quad \tilde{\lambda} = 0.008, \quad \tilde{\kappa} = 0.001, \quad \xi = 0.005, \quad \vartheta = 0.1, \quad \chi = 0.7, \quad G_0 = 50 \text{ (MPa)}, \quad n = 0.5, \quad \phi_c = 30^\circ, \\ c_e = 5, \quad \mathbf{c}_0 = -10\mathbf{I}, \quad \bar{u} = 20, \quad u_c = 9, \quad \mu_d = 1, \quad \phi_d = 25^\circ, \quad b_r = 20, \quad \phi_r = 28^\circ, \quad \zeta = 1, \quad \nu = 1, \quad C = 1.0 \text{ or } 0.5$$

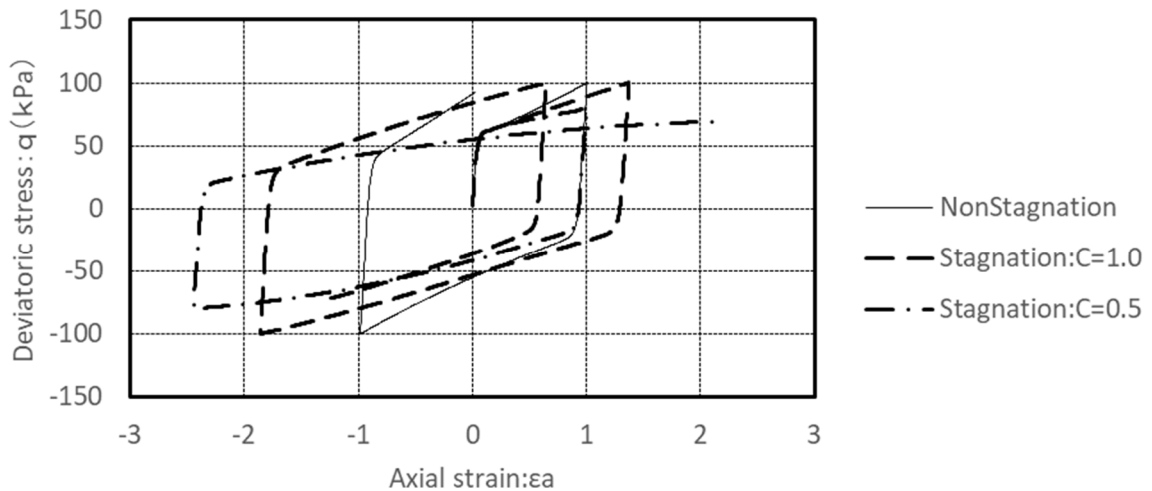


図5 偏差応力-軸ひずみ関係 (非排水条件)



#### 4. まとめ

金属に適用されている応力空間における等方硬化停滞現象を地盤の繰返し弾塑性モデルに適用した拡張下負荷面モデルの弾塑性構成式を示した。なお、等方硬化停滞現象以外の項目を下記に示す。

- ・繰返し負荷挙動を表現するための定式化
- ・回転硬化の導入
- ・弾性核の導入
- ・再負荷特性の改善（負荷方向に増大し、その逆負荷方向には低下する）
- ・引張強度領域を含む降伏関数の採用
- ・弾性係数の設定に一般的な砂の応力依存式の採用
- ・両対数等方圧密図における正規圧密線及び膨潤線の勾配の採用

また、定式化した弾塑性構成式を用いて土の非排水状態での繰返し載荷解析を行い、等方硬化停滞領域の影響を確認することができた。

今後の課題は、ひずみ空間での等方硬化鈍化領域の検討を行い、等方硬化停滞現象を評価するために応力空間とひずみ空間のどちらが適切であるかの検討を行う必要がある。また、実際の土の繰返し実験結果のシミュレーションを行い、定量的に等方硬化停滞の影響を検討する必要がある。

#### 参考文献

- 1) Hashiguchi, K., Mase, T., Yamakawa, Y.: Elaborated subloading surface model for accurate description of cyclic mobility in granular materials, Acta Geotechnica, 2021-06-26, Journal article.
- 2) Chaboche, J.L. and Dang-Van, K. and Cordier, G.: Modelization of the Strain memory effect on the cyclic hardening of 316stainless steel, Trans. 5th Int. Conf. SMiRT, Berlin, Division L., Paper No.L. 11/3., 1979.
- 3) Ohno, N. and Kachi, Y.: A constitutive model of cyclic plasticity for nonlinearly hardening materials, J. Appl. Mech (ASME), 53, pp.395-403, 1986.
- 4) Yoshida, F. and Uemori, T.: A Large-strain cyclic plasticity describing the Bauschinger effect and workhardening stagnation, Int. J. Plasticity, 18, pp.661-686., 2002.
- 5) Hashiguchi, K. and Ozaki, T.: Extended formulation of isotropic hardening stagnation behavior in cyclic loading of metals by the subloading surface model, J. Appl., 11, pp.263-270, 2008.
- 6) Hashiguchi, K., Ueno, M., Ozaki, T.: Extended of Subloading Surface Model and Its Application to Metals(1st Report, Formulation of constitutive equation), JSME, Vol.76, No.772, pp.263-272, 2010.
- 7) Hashiguchi, K. and Ueno, M.: Elastoplastic constitutive laws of granular materials. Constitutive Equations of Soils (Proc. 9th ICFSME, Spec. Session 9), Tokyo, JSSMFE, Tokyo, pp.73-82, 1977.
- 8) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity. Int. J. Solids Struct., 25, pp.917-945, 1989.
- 9) Truesdell, C.: Hypo-elasticity, J. Rational Mech. Anal., Vol. 4, pp.83-133, 1955.
- 10) Hashiguchi, K., Mase, T.: Extended yield condition of soils with tensile strength and rotational hardening, Int. J. Plasticity, 23, pp.1939-1956, 2007.
- 11) Hashiguchi, K. and Chen, Z.-P.: Elastoplastic constitutive equations of soils with the subloading surface and the rotational hardening, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., Vol. 22, pp.197-227, 1998.
- 12) Sekiguchi, H., Ohta, H.: Induced anisotropy and its time dependence in clays, Constitutive Equations of Soils, Proc. Spec. Session 9, 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., pp.229-238, 1977.
- 13) Nova, R.: On the hardening of soils, Arch. Mech. Stos., Vol. 29, pp. 445-458, 1977.
- 14) Wilde, P.: Two invariants depending models of granular media, Arch. Mech. Stos., Vol. 29, pp. 799-809, 1977.