

# 弾性支承梁理論に基づく単杭の地盤変位による 応答性状に関する検討

## Study on response by ground displacement of single pile based on beams on elastic foundation theory

間瀬 辰也\*

MASE Tatsuya

In this paper, it proposed the theory solution of beams on elastic foundation that considered the ground displacement. A general solution of the fourth order differential equation uses trigonometric in consideration of continuousness with the solution of beam on elastic foundation without ground displacement of recommendations for design of building foundation. The boundary conditions were; 1) It was assumed to be infinity long pile, 2) the pile head rotation restraint condition, and 3) the pile head rotation freedom condition.

It compared with the theory solution as a result of detailed thin layer method, and the range where the theory solution was able to be adopted was shown. It is important to execute the seismic deformation method that uses a detailed model.

### 1. はじめに

2019年11月に建築基礎構造設計指針<sup>1)</sup>の改定に伴い杭基礎の設計に際して、上部構造から作用する鉛直力、水平力および地盤震動による地盤変位を考慮する応答変位法(図1参照)を用いることが示された。しかし、設計者にとって応答変位法は情報が少ないのが現状である。

応答変位法の解析手法としては、杭体を軸力・曲げ・せん断棒、杭周地盤ばねをWinklerばねにモデル化し地中方向に離散化する詳細な手法<sup>2),3)</sup>などと杭体および地盤を一様と仮定し地盤変位を考慮した弾性支承上の梁理論の理論解より簡易に算定する手法<sup>4),5),6),7)</sup>(図2に参照。以下、簡易法と称す)がある。

既往の簡易法の検討では、杭頭回転拘束条件での算定結果<sup>4),6)</sup>の提示のみで算定式の記載がない文献や地盤変位を考慮した弾性支承梁の基本式の一般解に虚数を含む指数関数を用いた杭頭固定条件に対しての算定式<sup>5)</sup>のうち曲げモーメントと杭変形のみ<sup>7)</sup>が示された文献がある。

建築基礎構造設計指針には地盤変位を考慮しない場合の弾性支承上の梁理論に基づく算定式が示されているが、この場合の一般解は虚数を含まない三角関数が用いられている。

そこで、本論では建築基礎構造設計指針の地盤変位を考慮しない場合の弾性支承梁理論による方法との連続性を保つために、地盤変位を考慮した弾性支承梁理論の一般解に虚数を含まない三角関数を用いた算定式を提案する。また、既往研究では杭頭回転拘束条件のみ検討であることから杭頭回転自由条件での算定式の提案も行う。

---

\* 居住空間デザイン学科 教授

最後に一様地盤に地盤変位が作用する場合の杭応答分性状について、薄層要素法を用いた単杭の地震応答解析結果と提案式との杭応答結果の比較を示し、適用性について示す。

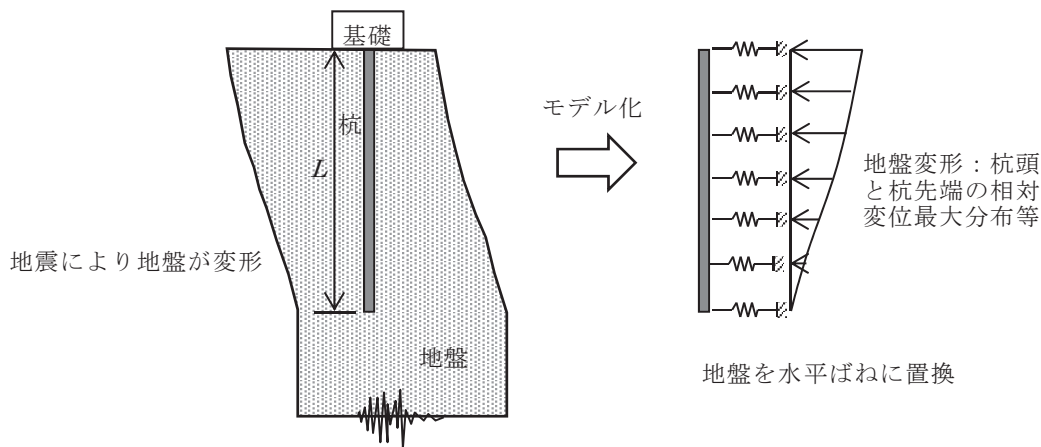


図1 応答変位法の概念図

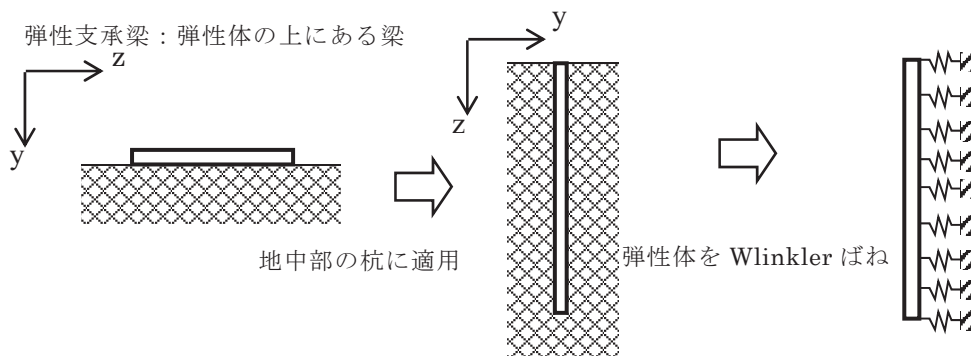


図2 弾性支承梁理論を杭に適用する場合の概念図

## 2. 地盤変位を考慮した弾性支承梁理論

式(1)に地盤変位を考慮した弾性支承梁理論の基本式を示す。一般解は、建築基礎構造設計指針に示されている地盤変位を考慮しない弾性支承梁理論の一般解との連続性を考慮して、三角関数を用いた定式化とする。また、地盤変位は既往文献<sup>7)</sup>にならい3次多項式で与えられるものとする。

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} + k_h \cdot B \cdot (y - \delta_g(z)) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\delta_g(z) = d - az - bz^2 - cz^3 \dots\dots\dots (2)$$

$$\beta = \left( \frac{k_h \cdot B}{4EI} \right)^{1/4} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$z$  : 地表面からの深さ (m) 、  $y$  : 深さ  $z$  における杭の水平変位 (m) 、  $B$  : 杭径 (m)  
 $E$  : 杭体のヤング係数 (kN/m<sup>2</sup>)、  $I$  : 杭体の断面二次モーメント (m<sup>4</sup>)

$k_h$  : 深さ  $z$  における単位長さあたりの水平地盤反力度 (kN/m<sup>2</sup>)

$\delta_g(z)$  : 地盤変位 (m) ( $a, b, c, d$  は 3 次多項式の係数)

$\beta$  : 杭の特性値 (1/m)、 $EI$  : 曲げ剛性 (kNm<sup>2</sup>)

一般解は三角関数を用いた式(4)とする。

$$y = e^{\beta z} (A_1 \cos \beta z + B_1 \sin \beta z) + e^{-\beta z} (C_1 \cos \beta z + D_1 \sin \beta z) z + (d - az - bz^2 - cz^3) \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $A_1, B_1, C_1, D_1$  は未定定数。

式(5)~(8)に式(4)の微分式を示す。

$$\frac{dy}{dz} = \beta e^{\beta z} \{ (A_1 + B_1) \cos \beta z + (-A_1 + B_1) \sin \beta z \} - \beta e^{-\beta z} \{ (C_1 - D_1) \cos \beta z + (C_1 + D_1) \sin \beta z \} - a - 2bz - 3cz^2 \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \beta^2 e^{\beta z} \{ 2B_1 \cos \beta z - 2A_1 \sin \beta z \} + \beta^2 e^{-\beta z} \{ -2D_1 \cos \beta z + 2C_1 \sin \beta z \} - 2b - 6cz \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{d^3y}{dz^3} = 2\beta^3 e^{\beta z} \{ (B_1 - A_1) \cos \beta z - (A_1 + B_1) \sin \beta z \} - 2\beta^3 e^{-\beta z} \{ -(C_1 + D_1) \cos \beta z + (C_1 - D_1) \sin \beta z \} - 6c \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{d^4y}{dz^4} = -4\beta^4 \{ e^{\beta z} (A_1 \cos \beta z + B_1 \sin \beta z) + e^{-\beta z} (C_1 \cos \beta z + D_1 \sin \beta z) \} \dots\dots\dots (8)$$

式(1)に、式(4)、(8)を代入すると 0 となり式(1)が一般解であることが分かる。

また、杭のせん断力、曲げモーメントは梁理論より式(9)、(10)である。

$$Q = -EI \frac{d^3y}{dz^3} \dots\dots\dots (9)$$

$$M = -EI \frac{d^2y}{dz^2} \dots\dots\dots (10)$$

杭の応答を算定するため、境界条件を仮定し、未定定数  $A_1, B_1, C_1, D_1$  を決定する。

まず、境界条件として無限に長い杭 ( $z \rightarrow \infty$  のとき  $y=0$ ) を仮定する。式(4)の第 1 項の  $e^{\beta z}$  は  $z \rightarrow \infty$  のとき無限大となるため  $A_1 = B_1 = 0$  となる。すなわち式(4)は、式(11)となる。

$$y = e^{-\beta z} (C_1 \cos \beta z + D_1 \sin \beta z) + (d - az - bz^2 - cz^3) \dots\dots\dots (11)$$

## 2.1 杭頭回転拘束条件の算定式

境界条件として  $z=0$  のとき  $\theta = dy/dz = 0$ 、杭頭せん断：  $Q_{(z=0)} = \text{外力} - H$  を仮定する。すなわち地盤変位での地表面はせん断力が生じないと仮定する。杭頭回転拘束条件より式(5)に  $z=0$  代入すると、

$$\theta_{(z=0)} = \frac{dy}{dz} \Big|_{z=0} = -\beta(C_1 - D_1) - a = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$D_1 = C_1 + \frac{a}{\beta} \dots\dots\dots (13)$$

杭頭せん断力は式(9)に式(7)を代入し、 $z=0$  とすると

$$Q_{(z=0)} = -EI \frac{d^3 y}{dz^3} = -EI \left[ 2\beta^3 \left( 2C_1 + \frac{a}{\beta} \right) - 6c \right] \dots\dots\dots (14)$$

杭頭 ( $z=0$ ) のせん断力  $Q_{(z=0)} = -H$  を式(14)に代入すると未定定数  $C_1$  は式(15)となる。

$$-EI \left[ 2\beta^3 \left( 2C_1 + \frac{a}{\beta} \right) - 6c \right] = -H \rightarrow C_1 = \frac{(H/EI + 6c)}{4\beta^3} - \frac{a}{2\beta} \dots\dots\dots (15)$$

式(13)に式(15)を代入すると未定定数  $D_1$  は式(16)となる。

$$D_1 = \frac{(H/EI + 6c)}{4\beta^3} + \frac{a}{2\beta} \dots\dots\dots (16)$$

したがって、杭の変位 ( $y$ )、せん断力 ( $Q$ )、曲げモーメント ( $M$ ) は式(17)、(18)、(19)となる。

$$y(z) = e^{-\beta z} \left\{ \frac{H/EI + 6c}{4\beta^3} (\cos \beta z + \sin \beta z) + \frac{a}{2\beta} (-\cos \beta z + \sin \beta z) \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$+ (d - az - bz^2 - cz^3)$$

$$Q(z) = -EI \cdot \left[ e^{-\beta z} \left\{ (H/EI + 6c) \cos \beta z + 2a\beta^2 \sin \beta z \right\} - 6c \right] \dots\dots\dots (18)$$

$$M(z) = -EI \left[ e^{-\beta z} \left\{ - \left( \frac{H/EI + 6c}{2\beta} + a\beta \right) \cos \beta z \right. \right. \dots\dots\dots (19)$$

$$\left. \left. + \left( \frac{H/EI + 6c}{2\beta} - a\beta \right) \sin \beta z \right\} - 2b - 6cz \right]$$

## 2.2 杭頭回転自由条件の算定式

境界条件として  $z=0$  のとき  $M=0$ 、杭頭せん断：  $Q_{(z=0)} =$  外力  $-H$  を仮定する。すなわち地盤変位での地表面はせん断力が生じないと仮定する。式(10)に式(6)を代入し、 $z=0$  とすると未定定数  $D_1$  は式(20)となる。

$$M_{(z=0)} = 2EI (\beta^2 D_1 + b) \rightarrow D_1 = -\frac{b}{\beta^2} \dots\dots\dots (20)$$

杭頭 ( $z=0$ ) のせん断力  $Q_{(z=0)} = -H$  の条件より、未定定数  $C_1$  は式(21)である。

$$Q = -EI \cdot \left[ -2\beta^3 \left\{ -C_1 + \frac{b}{\beta^2} \right\} - 6c \right] = -H \rightarrow C_1 = \frac{H/EI + 6c}{2\beta^3} + \frac{b}{\beta^2} \dots\dots\dots (21)$$

したがって、杭の変位 ( $y$ )、せん断力 ( $Q$ )、曲げモーメント ( $M$ ) は式(22)、(23)、(24)となる。

$$y(z) = e^{-\beta z} \left\{ \left( \frac{H/EI + 6c}{2\beta^3} + \frac{b}{\beta^2} \right) \cos \beta z + \left( -\frac{b}{\beta^2} \right) \sin \beta z \right\} \dots\dots\dots (22)$$

$$+ (d - az - bz^2 - cz^3)$$

$$Q(z) = -EI \cdot \left[ e^{-\beta z} \left\{ (H/EI + 6c)(\cos \beta z - \sin \beta z) - 4b\beta \sin \beta z \right\} - 6c \right] \dots\dots\dots (23)$$

$$M(z) = -EI \left[ e^{-\beta z} \left\{ 2b \cos \beta z + \left( \frac{H/EI + 6c}{\beta} + 2b \right) \sin \beta z \right\} - 2b - 6cz \right] \dots\dots\dots (24)$$

### 2.3 既往文献との比較

既往文献 7) の杭頭回転拘束条件の杭の変位、曲げモーメントの式と本論で提案している式 (17)、(19)、(24) を比較して示す。なお、検討条件は、杭を杭長  $L=30\text{m}$ 、曲げ剛性  $EI=1.203 \times 10^6 \text{kNm}^2$ 、地盤を均質地盤とし  $k_b=8.680 \times 10^3 \text{kN/m}^3$ 、地盤盤変位を均質地盤で提案されている cosine 形状の地盤変位 ( $a=-0.000172, b=0.000128, c=-1.1824 \times 10^{-6}, d=0.07601$ ) とした。

図 3 に地盤変位、杭変位、曲げモーメントの比較を示す。杭頭回転拘束条件は既往文献と同等の結果であり、一般解は三角関数を用いた本論の式の妥当性を確認した。また、今回新たに算出した杭頭回転自由条件では杭頭曲げモーメントが 0 となり、深くなるにつれて杭頭条件の影響が少なくなるため杭頭回転拘束条件と一致する。

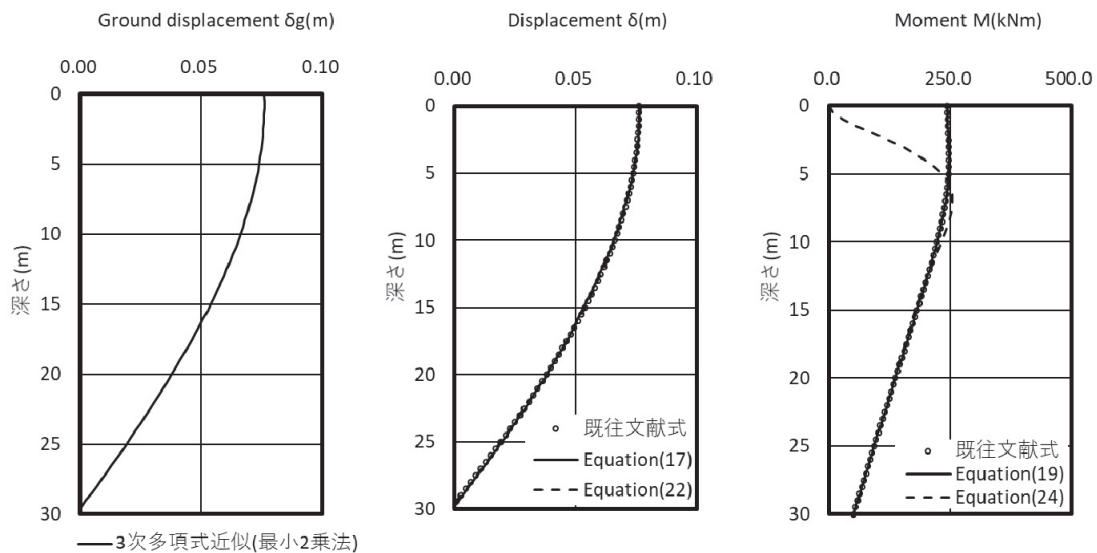


図 3 提案式と既往文献 7) 式による杭応答比較

### 3. 地盤変位の算定式

地盤変位分布は、「建築基礎構造設計指針」の方法、「鉄道構造物等設計標準・同解説 耐震設計、丸善(株)」の A1 地盤（表層均質）の式、B 地盤（深さ方向に 1 次的に剛性が増加）の式などがある。弾性支承梁理論では均質地盤を仮定しているため、均質地盤の場合の地盤変位について「建築基礎構造設計指針」の方法、A1 地盤の式および 3 次多項式近似（最小 2 乗法）の比較を図 4 に示す。建築基礎構造設計指針、鉄道構造物等設計標準・同解説とも良い対応をしている。

建築基礎構造設計指針の地震荷重(設計用地震動)を地表で設定する場合の地盤変位算定式を下記に示す。 $D_{max}$  で無次元化した地表面からの深さ方向の地盤の水平変位  $u_i$  である。

$$D_{max} = C_1 (\alpha^2 - 1) f_A \sum H_i \left\{ C_2 (1 - 1/\alpha^2) + 2R_{z0}/\alpha \right\} \cdot u_{i+1} = u_i - \frac{40}{k_i (\alpha T_0)^2} \sum_{j=0}^i m_j u_j \quad (25)$$

鉄道構造物等設計標準・同解説 耐震設計の表層均質地盤の算定式を下記に示す。

$$\delta_{A1g}(x) = \delta_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2H}\right) \dots\dots\dots (26)$$

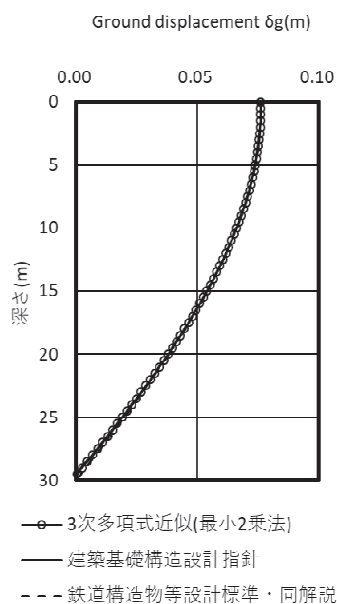


図4 地盤変位分布比較

#### 4. 精算解との比較

単杭の地盤震動による杭応答性状について、地盤変位を考慮した弾性支承梁理論（弾性支承理論解）による応答変位法と精算解と位置付ける3次元薄層要素法(TLM)を用いた地震応答解析結果との比較を行う。なお、杭体および地盤は線形としている。

##### 4.1 解析条件

図5に解析モデルを示す。杭体は、場所打ちコンクリート杭（ $E=2.27 \times 10^7 \text{kN/m}^2$ ）とし、杭径 $\phi 1.0\text{m}$ 、杭長 $L=17\text{m}$ とする。杭頭回転拘束条件は、固定と回転自由の2ケースとする。地盤モデルは、工学的基盤（Vs400）まで30m、密度 $\rho=1.8\text{g/cm}^3$ 、 $\nu=0.4$ 、 $h=3\%$ 、工学的基盤上をせん断波速度 $V_s=150\text{m/s}$ の均質地盤とする。地盤の1次周期は0.8秒である。

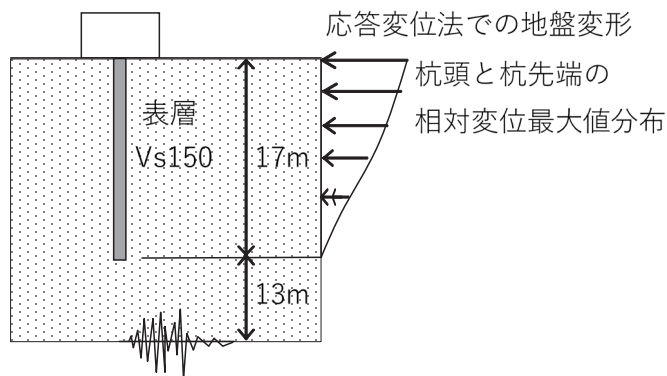
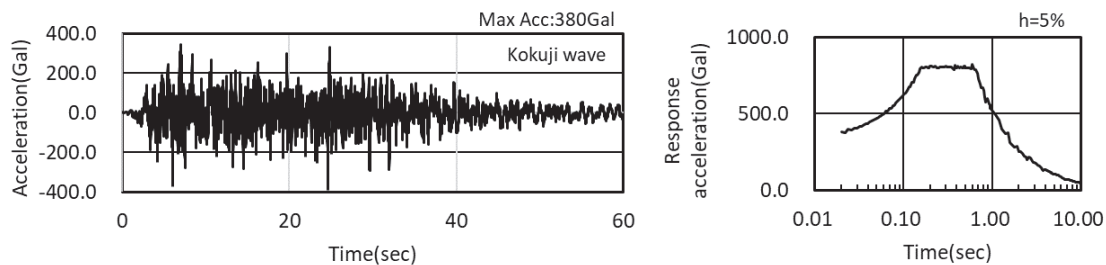


図5 解析モデル

薄層要素法による精算解では、無質量剛の基礎に取りつく単杭モデルに告示波(最大加速度380Gal)を工学的基盤より入力し、地震応答解析より算定している。図6に入力地震動を示す。

地盤変位を考慮した弾性支承梁理論による応答変位法では、重複反射理論を用いて地盤応答解析を実施し、算定された各杭深さでの時刻歴変位応答を杭先端の時刻歴応答で基準化した各深さにおける最大応答変位を地盤変位(図5参照)として入力した。



(a) 加速度時刻歴

(b) 応答スペクトル

図6 入力地震動：告示波レベル2

#### 4.2 解析結果

図7に杭頭回転拘束条件、図8に杭頭回転自由条件での精算解と弾性支承梁理論による杭応答分布の比較を示す。

図7より杭頭回転拘束条件では、弾性支承梁理論による杭応答を精算解と比較すると曲げモーメント及びせん断力とも杭頭付近の応答は良い対応を示すが、杭先端に向かって結果の差異が大きくなる。これは、弾性支承梁理論では無限長の杭長を仮定しているが精算解の解析モデルでは杭先端の境界条件を導入していることが原因と考えられる。

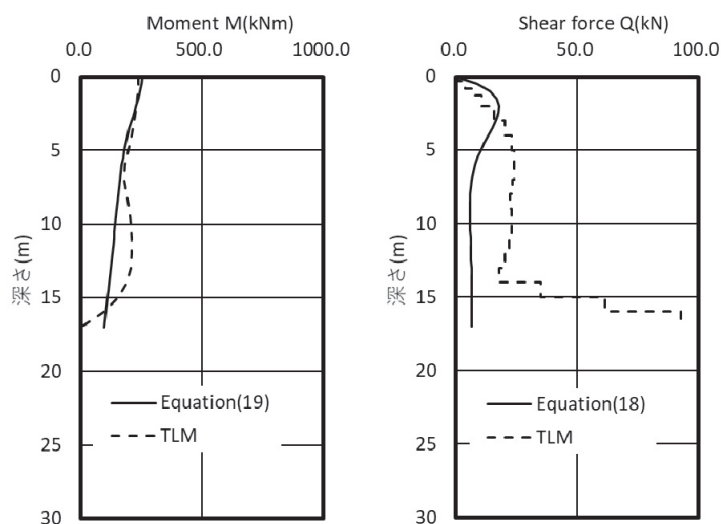


図7 杭応答分布(杭頭回転拘束条件)

図8より杭頭回転自由条件では、弾性支承梁理論による杭応答を精算解と比較すると曲げモーメントの杭頭付近の応答は良い対応を示すが、杭先端に向かって結果の差異が大きくなる。これは、杭頭回転拘束条件と同様の要因と考えられる。せん断力については、弾性支承梁理論では杭

頭でのせん断力 0 を仮定しているため、杭頭部でのせん断力を評価できていない。また、杭先端に向かって結果の差異が大きくなる。これは、杭頭回転拘束条件と同様の要因と考えられる。

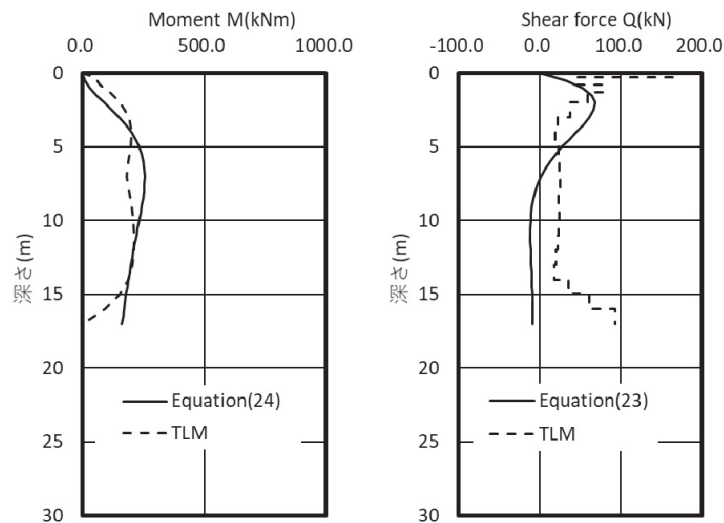


図 8 杭応答分布（杭頭回転自由条件）

## 5. まとめ

地盤変位を考慮した弾性支承梁の杭頭回転拘束条件および杭頭回転自由条件での理論解を示した。一般解に、建築基礎構造設計指針での地盤変位を考慮しない場合の弾性支承梁の理論解との連続性を考慮して三角関数を用いている。

地盤変位を考慮した弾性支承梁理論の理論解と精算解と位置付けた薄層要素法の杭応答を比較した結果、杭体の設計に大きな影響のある曲げモーメントは、杭頭付近に関して良い対応を示している。杭頭付近以深に関しては、過小評価する傾向が認められるため、設計に用いる場合は杭頭付近のみに適用する必要がある。特に、杭頭回転自由条件における杭頭付近のせん断力は過小評価しているため梁ばねモデルなどで評価する必要がある。

従来、杭の設計に地盤変位を考慮していなかった設計者が、設計当初の杭の仮定断面の検討時には本論で示した地盤変位を考慮した弾性支承梁の理論解を用いる場合は、十分適用範囲にあると考えられる。ただし、基本設計、実施設計においては、建築基礎構造設計指針にあるように杭体を軸力・曲げ・せん断棒、杭周地盤ばねを Winkler ばねにモデル化し地中方向に離散化する詳細なモデルを用いた応答変位法を実施することが重要である。



## 参考文献

- 1) 日本建築学会：建築基礎構造設計指針、(pp.106-111、pp.255-283)、2019年11月
- 2) 間瀬辰也、中井正一：単杭の杭周地盤ばねの評価法に関する検討、日本建築学会構造系論文集、No.680、(pp.1527-1535)、2012年10月
- 3) 町田幸紀、関崇夫：杭と地盤の非線形性を考慮した単杭の設計法に関する研究、群馬大学学術情報リポジトリ、2015年2月
- 4) 多田公平、時松孝次、浅香美冶：液状化・側方流動に伴う地盤変形を考慮した杭の変位・応力分布、日本建築学会大会学術講演会、(pp.771-772)、1997.
- 5) 濱田純次、谷川友浩、内田明彦：パイルド、ラフト基礎の杭断面力に対する地盤変形分布の影響、日本建築学会学術講演梗概集. B-1、構造 I、(pp.515-516)、2009.
- 6) 山中龍、時松孝次：2層地盤において水平力や地盤変形をうける杭の変形と応力の統一的表現、日本建築学会大会学術講演会、(pp.405-406)、2015.
- 7) 濱田純次：地盤変形を受ける杭基礎の簡易杭応力算定式、日本建築学会技術報告集、Vol.25、No.59、(pp.115-118)、2019年2月