

円板のつくり出す音と新しい楽器の可能性  
— 自由端円板における固有振動数に対する曲げモーメントの影響の理論的考察 —

The sound generated by a circular plate and the possibility as a new musical instrument  
- A theoretical study of effects of bending moment to natural frequencies for circular plate with  
completely free condition all around -

秋元秀美<sup>1</sup> 櫻井直樹<sup>1</sup> 山本良一<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 広島大学 大学院生物圏科学研究科

〒739-0046 広島県東広島市鏡山 2-313

<sup>2</sup> 人間環境科学研究所

Hidemi Akimoto<sup>1</sup>, Naoki Sakurai<sup>1</sup> and Ryoichi Yamamoto

<sup>1</sup> Graduate School of Biosphere Science, Hiroshima University,

2-313 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima 739-0046, Japan

## 概要

青銅で作った円板が放つ音色を奏でる振動は、自由端円板の場合、半径方向と接線方向の曲げモーメントの寄与を入れた固有振動数の理論値と一致することがわかった。自由端円板における曲げモーメントの固有振動数への影響を理論的に考察するため、自由端円板の固有振動数の計算に必要な境界条件で用いる曲げモーメントを半径方向の曲げモーメントのみにして接線方向の曲げモーメントを除いて計算した時の計算値を、半径方向と接線方向の曲げモーメントの寄与を入れた固有振動数の理論値と比較した。その結果、ドーナツ形状をした振動モードが半径方向の曲げモーメントによって発生することがわかった。また、ドーナツ形状の同心円の節の数 $m$ が0個の時には、ピザ形状を生む直径上の節線の数 $n$ が2個または3個の振動モードで10%以上の大きな差があったことから、 $(n, m) = (2, 0), (3, 0)$ において接線方向の曲げモーメントによるせん断力の寄与がもっとも大きかったことがわかった。さらに、 $m$ が1以上では、ピザの数が多くなればなるほど接線方向の曲げモーメントによるせん断力の寄与が大きくなることがわかった。これより、2種類の力（曲げモーメント）が、円板の中心部や周辺部から発する音色を説明するのがわかった。

## 1. 諸言

青銅でできた円板を叩くと深みのある音を発する。その音は、聞く位置によって日本のお寺の梵鐘のような音や、西洋の鐘のような音に聴こえるので、聴く人に様々な叙情的想像をかきたてる。そのような豊かな音の組み合わせをもつ青銅円板は、楽器としての可能性を備えている。青銅円板の特徴の一つに、聴く位置による音色の違いがある。管楽器や弦楽器、そして打楽器は、多少の音の大きさの違いはあるものの、音色はどの方向から聴いてもほぼ同一である。しかし、青銅円板が放つ音色は、聴く位置によって異なるという興味深い特徴がある。上で述べた日本のお寺の梵鐘のような音は円板の中心部から真上の方

向に発する傾向があるのに対し、西洋の鐘のような音は円板の周辺部から発する傾向があることが、人の耳と機器による測定から明らかになりつつある。

円周部分が固定されていない自由端の円板が共鳴振動（固有振動）するときには 2 種類の振動の仕方（振動モード）がある。一つは図 1 に示したドーナツのような同心円状の筋（破線）が入る振動で、もう一つは図 2 のようにピザの形状をした直径方向に筋（破線）の入るような振動である。図 1 と図 2 の上部に記した  $(n, m)$  の  $n$  は、ピザ形状を生む直径上の節線の数を表し、 $m$  はドーナツ形状の同心円の節の数を表す。例えば、 $(n, m) = (0, 1)$  は同心円の節が 1 つ、 $(n, m) = (0, 2)$  は 2 つ入ることを表す。 $(n, m) = (2, 0)$  は直径上の節線が 2 つ、 $(n, m) = (3, 0)$  は 3 つ入ることを表す。このように、自由端の円板の振動モードにはドーナツ形とピザ形のそれぞれがある。ただし、ドーナツ形とピザ形の両方が混合した振動モードもある（図 3）。

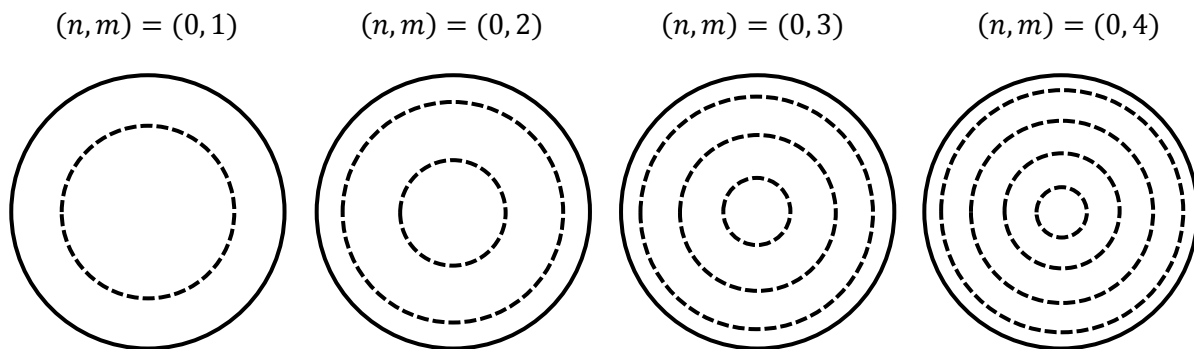


図 1 ドーナツ形の振動モードの例.

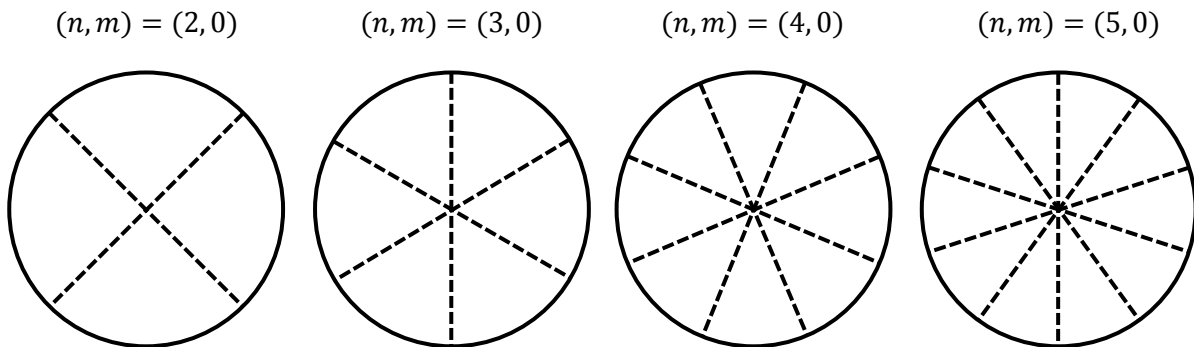


図 2 ピザ形の振動モードの例.

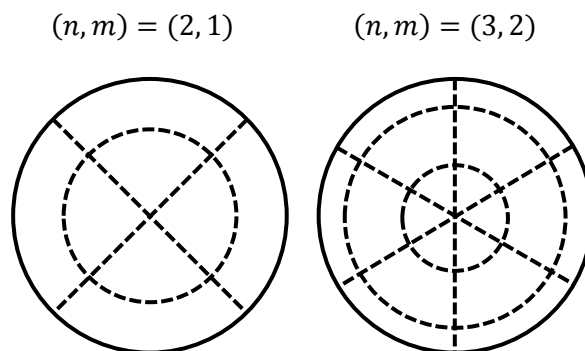


図 3 ドーナツ形とピザ形が混合した振動モードの例.

円板の中心部から発する音の振動は主にドーナツ形であるのに対し、円板の周辺部から発する音はドーナツ形とピザ形が重なった振動であることが、振動の形状から予想される。したがって、円板の中心部から発する日本の梵鐘のような音の主成分はドーナツ形の振動から、円板の周辺部から発する西洋の鐘のような音はドーナツ形とピザ形の混合の振動から発せられると考察される。このようなドーナツ形とピザ形の振動を生むのは、円板内部のせん断応力と呼ばれる力によって生じる曲げモーメントによって発生することが知られている。しかし、ドーナツ形の振動とピザ形の振動がそれぞれどのような種類の曲げモーメントによって発生するかはこれまでよくわかっていなかった。

円板は最も基本的な形状をした板の一つで、その振動に関する研究は 100 年以上前から行われてきた (Chakraverty, 2009; Leissa, 1993)。円板の周辺が完全固定 (McLachlan, 1948)、単純支持 (Prescott, 1961)、自由端 (Airey, 1911) とする条件下で、固有振動数を求める振動数方程式が導出されてきた。振動数方程式の算出では、半径方向と接線方向の 2 方向について曲げモーメントを用いることにより、精度の高い固有振動数を計算することができる。円板の振動では、半径方向と法線方向の面内で半径方向の曲げモーメントによってはたらくせん断力が発生しドーナツ形状の変形を生む。一方、接線方向の曲げモーメントにより、接線方向と法線方向の面内ではたらくせん断力が発生しピザ形状の変形をもたらす。2 つの曲げモーメントの内、半径方向の曲げモーメントが円板の運動に大きな寄与をして、接線方向の曲げモーメントは小さいことは予測できる。しかし、実際、半径方向の曲げモーメントがどの程度、固有振動数に影響を与えるかは、これまで定量的に評価されたことはなかった。そこで、自由端円板における曲げモーメントの固有振動数への影響を、接線方向の曲げモーメントを作為的に除くことによって理論的に考察することにした。

## 2. 半径方向の曲げモーメントのみが寄与する振動数方程式

$(x, y)$  平面状に広がる板が振動する時、平面に垂直な  $z$  方向の振動変位  $w(x, y)$  は以下の式で記述される (Chakraverty, 2009; Leissa, 1993)。

$$D\nabla^4 w(x, y) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $D$  は曲げ剛性 (flexural rigidity) と呼ばれる定数で、次式で定義される。

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

$E$  はヤング率、 $h$  は板の厚み、 $\nu$  はポアソン比、 $\rho$  は密度である。また、 $\nabla^4$  は  $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$  で定義される。ここで、 $\nabla^2$  はラプラシアン演算子 (Laplacian operator) と呼ばれ、 $\nabla^4 w$  は次式で与えられる。

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad (3)$$

これから円板の自由振動について考えるので、円板の運動を極座標で扱うことにする。極座標を用いると振動の変位は、

$$w(r, \theta, t) = W(r, \theta)e^{i\omega t} \quad (4)$$

と書ける。ここで $W(r, \theta)$ 、は極座標 $(r, \theta)$ の位置だけで決まる振動の振幅、 $\omega$ は角振動数である。式(4)を式(1)に代入すると、次式が得られる。

$$(\nabla^4 - \beta^4)W = 0 \quad (5)$$

$$\beta^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \quad (6)$$

式(5)は、次式のように因数分解することにより解くことができる。

$$(\nabla^2 + \beta^2)(\nabla^2 - \beta^2)W = 0 \quad (7)$$

式(7)は板の振動変位を与える基本式である。式(7)の解は、以下の2つの微分方程式の解 $W_1$ 、 $W_2$ の重ね合わせにより求めることができる。

$$(\nabla^2 + \beta^2)W_1 = 0 \quad (8)$$

$$(\nabla^2 - \beta^2)W_2 = 0 \quad (9)$$

すなわち、

$$W = W_1 + W_2 \quad (10)$$

極座標の下で、 $W_1$ と $W_2$ を $r$ と $\theta$ を含む項へ部分分解すると次式のようになる。

$$W_1(r, \theta) = R_1(r)\Theta_1(\theta) \quad (11)$$

$$W_2(r, \theta) = R_2(r)\Theta_2(\theta) \quad (12)$$

式(11)を式(8)へ、式(12)を式(9)へ代入して $W_1$ と $W_2$ を求めることができる。ここで、 $\beta r = 0$ のとき $W_1$ と $W_2$ は有限の値をとる条件に注意すると $W_1$ と $W_2$ を構成する第2種ベッセル関数は消える。よって、式(10)で表される解 $W$ は以下で与えられる。

$$W(r, \theta) = W_1 + W_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(\beta r) + C_n I_n(\beta r)] \cos n\theta \quad (13)$$

ここで、 $J_n$ は第1種ベッセル関数、 $I_n$ は第1種変形ベッセル関数である。 $n$ は半径方向に節が入るピザ形のモード形状を決める。

振動の変位 $w(x, y)$ が求まったので、接線方向の曲げモーメントが寄与しない境界条件による振動数方程式を算出する。半径 $a$ の自由端円板の境界条件は、(i) 円板の一番外側において半径方向の曲げモーメント (bending moment) がゼロであること、(ii) 半径方向のせん断力がゼロであることの二つである。2つの境界条件において、式(1.3)が利用される。2つの境界条件は次式で表される。

$$M_r(r, \theta)|_{r=a} = 0 \quad (1.4)$$

$$V_r(r, \theta)|_{r=a} = 0 \quad (1.5)$$

境界条件(i)を表す式(1.4)の曲げモーメント $M_r$ は、

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \quad (1.6)$$

で与えられる。自由端円板の $M_r$ は半径( $r$ )方向に依存するようにしたので、接線( $\theta$ )方向の寄与はない。式(1.4)に $M_r$ と振動変位 $W(r, \theta)$ を代入して次式が得られる。

$$A_n \left[ J_n''(\lambda) + \frac{\nu}{\lambda} J_n'(\lambda) \right] + C_n \left[ I_n''(\lambda) + \frac{\nu}{\lambda} I_n'(\lambda) \right] = 0 \quad (1.7)$$

ここで、 $A_n$ と $C_n$ は定数で、 $\lambda$ は次式(1.8)で定義される。式(1.7)の第1種ベッセル関数の微分 $J_n''$ と $J_n'$ 、第1種変形ベッセル関数の微分 $I_n''$ と $I_n'$ は、 $\lambda$ について行われる。式(1.7)中の $n$ は、ピザ形状を生む直径上の節線の数に対応する。同一の $n$ でもドーナツ状の同心円の節が入る振動モードもあり、この時の同心円の節の数を通常 $m$ で表す。

$$\lambda = \beta a = a \sqrt{\omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}}} \quad (1.8)$$

次に、境界条件(ii)を表す式(1.5)の半径方向のせん断力 $V_r$ は、

$$V_r = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \quad (1.9)$$

と定義される。ここで、 $M_{r\theta}$ はねじれモーメント (twisting moment) と呼ばれる量で、式(1.9)の第2項目 $(1/r)\partial M_{r\theta}/\partial \theta$ は接線方向と円板の法線方向の面内で生じるせん断力を表し、接線方向のモーメントの寄与が入るため、この項はゼロとする。よって、式(1.9)は、

$$V_r = Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) \quad (2.0)$$

と表される．これを式 (15) に代入すると次のような条件が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = 0 \quad (21)$$

これに振動変位  $W(r, \theta)$  を代入することにより次式が得られる．

$$A_n \left[ J_n'''(\lambda) + \frac{1}{\lambda} J_n''(\lambda) - \frac{1}{\lambda^2} J_n'(\lambda) \right] + C_n \left[ I_n'''(\lambda) + \frac{1}{\lambda} I_n''(\lambda) - \frac{1}{\lambda^2} I_n'(\lambda) \right] = 0 \quad (22)$$

式 (17) と式 (22) から係数  $A_n$  と  $C_n$  を消去することにより次式の振動数方程式を得た．

$$\frac{J_n''(\lambda) + \frac{\nu}{\lambda} J_n'(\lambda)}{I_n''(\lambda) + \frac{\nu}{\lambda} I_n'(\lambda)} = \frac{J_n'''(\lambda) + \frac{1}{\lambda} J_n''(\lambda) - \frac{1}{\lambda^2} J_n'(\lambda)}{I_n'''(\lambda) + \frac{1}{\lambda} I_n''(\lambda) - \frac{1}{\lambda^2} I_n'(\lambda)} \quad (23)$$

式 (23) は，半径方向の曲げモーメントが寄与した場合の自由端円板の固有振動数を決める振動数方程式である．この振動数方程式の根  $\lambda$  により固有振動数を求めることができる．

### 3. 接線方向と半径方向の曲げモーメントが寄与する振動数方程式との比較

接線方向と半径方向の曲げモーメントの寄与を入れて導出された自由端円板の振動数方程式 (Airey, 1911; Leissa, 1993) は，次式の通りである．

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^2 J_n(\lambda) + (1-\nu) [\lambda J_n'(\lambda) - n^2 J_n(\lambda)]}{\lambda^2 I_n(\lambda) - (1-\nu) [\lambda I_n'(\lambda) - n^2 I_n(\lambda)]} \\ &= \frac{\lambda^3 J_n(\lambda) + (1-\nu) n^2 [\lambda J_n'(\lambda) - n^2 J_n(\lambda)]}{\lambda^3 I_n(\lambda) - (1-\nu) n^2 [\lambda I_n'(\lambda) - n^2 I_n(\lambda)]} \end{aligned} \quad (24)$$

この式を半径方向の曲げモーメントのみ寄与する振動数方程式の式 (23) と比較すると，半径方向の曲げモーメントのみ寄与する式 (24) にはポアソン比が入る特徴がある．この式 (24) の根の二乗 ( $\lambda^2$ ) を表 1 (a) に示した．根を二乗すると固有振動数  $f$  に比例する．表中の  $n$  はピザ形状を生む直径上の節線の数， $m$  はドーナツ状の同心円の節の数を表す．表 1 (b) では，半径方向の曲げモーメントのみが寄与する振動数方程式の式 (23) の  $\lambda^2$  を示した．なお， $(n, m) = (0, 0), (1, 0)$  は観測されない振動モードなので空欄にした．ここで，青銅で作られた円板を実際に測定した振動数を表 1 (a) (b) の理論値と比較してみる． $(n, m) = (0, 1)$  の振動数を 1 として比較する．まず，直径 15cm，厚み 2mm の青銅円板の固有振

動数を測定した時の結果を表2に示した. 表中の-は明確に観測されなかった振動モードを表す.

次に, 表1 (a) と (b) を基にして得られた振動数比の理論値を表3 (a) と (b) に示した. 表2の固有振動数の測定値と, 表3 (a) (b) の理論値を比較すると, 半径方向の曲げモーメントのみが寄与する場合の表3 (b) より半径方向と接線方向の2つの曲げモーメントが寄与する場合の表3 (a) の振動比の方が実測値とよく合っていた. このことから, やはり半径方向と接線方向の2つの曲げモーメントを寄与させた方が実際の自由端円板の振動を説明していることがわかった.

表1 (a) 半径方向と接線方向の曲げモーメントが寄与する $\lambda^2$

No of pizza	No of donuts					
	m = 0	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5
n = 0		9.11187	38.5491	87.8542	156.921	245.736
n = 1		20.5385	59.8905	119.042	197.96	296.631
n = 2	5.19582	35.2309	84.3826	153.344	242.087	350.594
n = 3	12.1086	52.8632	111.876	190.663	289.234	407.574
n = 4	21.3122	73.2685	142.261	230.919	339.339	467.525
n = 5	32.7579	96.3412	175.451	274.046	392.351	530.403

表1 (b) 半径方向の曲げモーメントのみが寄与する $\lambda^2$

No of pizza	No of donuts					
	m = 0	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5
n = 0		9.11187	38.5491	87.8542	156.921	245.736
n = 1		20.1921	59.6327	118.844	197.799	296.496
n = 2	7.09643	33.9528	83.4561	152.621	241.494	350.091
n = 3	13.655	50.2473	109.974	189.160	287.988	406.510
n = 4	22.2043	69.0111	139.139	228.429	337.259	465.736
n = 5	32.7455	90.1995	170.909	270.393	389.279	527.746

表 2 青銅円板（直径 15cm, 厚み 2mm）の固有振動数比の測定値.

No of pizza	No of donuts					
	m = 0	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5
n = 0		1	4.17	9.47	16.84	—
n = 1		—	—	13.03	21.27	—
n = 2	0.57	3.82	9.15	16.52	26.60	—
n = 3	1.31	5.71	12.02	20.44	—	—
n = 4	—	7.90	—	24.64	—	—
n = 5	3.47	10.33	19.23	30.87	—	—

表 3 (a) 半径方向と接線方向の 2 つの曲げモーメントが  
寄与する場合の振動数比（理論値）.

No of pizza	No of donuts					
	m = 0	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5
n = 0		1	4.23	9.64	17.22	26.97
n = 1		2.25	6.57	13.07	21.73	32.55
n = 2	0.57	3.87	9.26	16.83	26.57	38.48
n = 3	1.33	5.80	12.28	20.93	31.74	44.73
n = 4	2.34	8.04	15.61	25.34	37.24	51.31
n = 5	3.60	10.57	19.26	30.08	43.06	58.21

表 3 (b) 半径方向の曲げモーメントのみが  
寄与する場合の振動数比（理論値）.

No of pizza	No of donuts					
	m = 0	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5
n = 0		1	4.23	9.64	17.22	26.97
n = 1		2.22	6.54	13.04	21.71	32.54
n = 2	0.78	3.73	9.16	16.75	26.50	38.42
n = 3	1.50	5.51	12.07	20.76	31.61	44.61
n = 4	2.44	7.57	15.27	25.07	37.01	51.11
n = 5	3.59	9.90	18.76	29.67	42.72	57.92



表4 接線方向と半径方向の曲げモーメントが寄与する $\lambda^2$ と  
半径方向の曲げモーメントのみが寄与する $\lambda^2$ の差 (%) \*

No of pizza	No of donuts					
	m = 0	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5
n = 0		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
n = 1		-1.7	-0.4	-0.2	-0.1	0.0
n = 2	36.6	-3.6	-1.1	-0.5	-0.2	-0.1
n = 3	12.8	-4.9	-1.7	-0.8	-0.4	-0.3
n = 4	4.2	-5.8	-2.2	-1.1	-0.6	-0.4
n = 5	0.0	-6.4	-2.6	-1.3	-0.8	-0.5

\* 背景が灰色の数値は差が5%以上であることを示す.

接線方向の曲げモーメントが無くなって半径方向の曲げモーメントだけになったことによる固有振動数への影響を調べるために、表1 (a) と (b) の $\lambda^2$ の値がどの程度異なるかその差 (%) を表4に示した。表4の差を見ると、両者には $n = 0$ において差がなかった。また、 $m$ が大きくなる時、差が小さくなることがわかった。一方、 $m \geq 2$ の時あるいは $(n, m) = (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 0), (5, 0)$ の時は5%以内の差であるが、 $(n, m) = (2, 0), (3, 0), (4, 1), (5, 1)$ の時(表内の灰色部を参照)は、5%よりも大きく、特に $(n, m) = (2, 0), (3, 0)$ では差が10%を超えている。つまり、灰色で示した振動モードが、接線方向の曲げモーメントを取り除いて半径方向の曲げモーメントだけにしたことによって最も影響を受けたところであることがわかった。このことから、ピザ数の少ない $(n, m) = (2, 0), (3, 0)$ では、大きな振動変位でピザ形状にするために、接線方向の曲げモーメント、すなわち、接線方向と円板の法線方向のなす面ではたらくせん断力の寄与がもっとも大きいことを示している。また、 $m \geq 1$ では、 $n$ が大きくなるにつれて差がマイナス、すなわち、半径方向の曲げモーメントのみの固有振動数の方がより小さくなっていくこと、 $m = 0$ では、 $n$ が2から5の間ではプラスであることがわかった。このことは、接線方向の曲げモーメントが、ドーナツ形状が入った振動モードでは、振動を促進させようとするアクセルの役割をするのに対して、完全なピザ形状をした振動モード( $n \geq 2, m = 0$ )では振動を抑制しようとするブレーキの役割をすることを意味しているようだが、著者らはその理由については説明できない。

#### 4. 考察

表4の結果から、接線方向の曲げモーメントを取り除いて半径方向の曲げモーメントだけにした時に、固有振動数が影響を受けない振動モードは $n = 0$ であることが示された。ピザ形状を生む直径上の節線の数 $n$ が0の時は、固有振動モードの形状がドーナツ状のみで、ピザ形状がない時に対応する。このことから、ドーナツ形状の振動モードを発生するだけなら、半径方向の曲げモーメントによるせん断力だけで自由端円板の振動を説明できることを示している。すなわち、ドーナツ形状は、半径方向の曲げモーメントによって発生すると考えることができる。このように考えると、ピザ形状が入っても( $n \neq 0$ )、ドーナツ形状の同心円の節( $m$ )が大きくなると、差が小さくなるという結果(表4)も説明できる。

一方、固有振動モードにピザ形状が入ると、半径方向の曲げモーメントだけでは説明できなくなることが表4からわかった。特に、ドーナツ状の同心円の節の数 $m \geq 1$ では、直径上の節線の数 $n$ が大きくなるにつれて、差が大きくなった。このことから、ドーナツ形状にピザ形状が入った振動モードでは、接線方向の曲げモーメントが必要とされ、ピザの数が多くなればなるほど接線方向の曲げモーメントによるせん断力の寄与が大きくなると考えることができる。このように考えると、 $n$ が2から5まで大きくなるにつれて差が小さくなる $m = 0$ では、 $n$ が5より大きくなると $m \geq 1$ のように差が負側に大きくなっていくことが予想される。

これらのことから、円板の中心付近から日本の梵鐘のような音を発するドーナツ形状の振動モードは、半径方向の曲げモーメントの力によってのみ生み出され、円板の周辺から西洋の鐘のような音を発するドーナツ形状とピザ形状の振動モードは、半径方向の曲げモーメントと接線方向の曲げモーメントの2つの力によって生み出されることがわかった。このように、2種類の力（曲げモーメント）が、円板の中心部や周辺部から発する音色を説明するのがわかった。

#### 参考文献

- Airey, J.R., (1911). The vibrations of circular plates and their relation to Bessel functions. Proceedings of the Physical Society of London 23, 225-232.
- Chakraverty, S., (2009). Vibration of plates. CRC Press.
- Leissa, A.W., (1993). Vibration of plates. Acoustical Society of America.
- McLachlan, N.W., (1948). Bessel Functions for Engineers. Oxford Univ. Press, London.
- Prescott, T., (1961). Applied Elasticity. Dover Pub.